FERNÃO COUCEIRO DA COSTA

SOMAS DE SÉRIES
NO SENTIDO GENERALIZADO

Factores de convergência

PÔRTO
IMPRENSA PORTUGUESA
Rua Formosa, 116
1931

150179

SOMAS DE SÉRIES
NO SENTIDO GENERALIZADO

Factores de convergência

FERNÃO COUCEIRO DA COSTA

SOMAS DE SÉRIES
NO SENTIDO GENERALIZADO

Factores de convergência

PÔRTO
IMPRENSA PORTUGUESA
Rua Formosa, 116
—
1931

Dissertação para o concurso a um lugar de professor catedrático da Secção de Matemática da Faculdade de Sciências da Universidade do Pôrto (1.º grupo).

PREFÁCIO

Abel e Cauchy, notando a falta de rigor da Análise no século XVIII, puseram em evidência o cuidado que é necessário na aplicação das séries.

A seguir aos seus trabalhos, quási foram abandonadas as séries divergentes. Porém, o Sr. Borel e outros Matemáticos mostraram, recentemente, que não é justa esta forma de proceder e que as séries divergentes são susceptíveis de representar um papel importante na Análise.

Um estudo a que procedemos, sôbre séries de Fourier, mostrou-nos bem, quanto é justa aquela afirmação e conduziu-nos, naturalmente, para o campo das séries divergentes.

É claro, que o trabalho que apresentamos, não tem a pretenção de conter uma exposição completa sôbre séries divergentes. Seria essa exposição demasiadamente longa, imprópria para constituir uma dissertação de concurso.

Para obter somas de séries, no sentido generalizado, *empregamos* factores de convergência.

O primeiro capítulo desta dissertação contém generalidades sôbre o modo de obter estas somas, e condições a que devem satisfazer os factores de convergência. Trata também, especialmente, duas sucessões de factores de convergência, que couduzem a resultados, de que fazemos aplicação nos dois capítulos seguintes.

Seguindo a norma, que nos parece indiscutível, que num trabalho sôbre Análise se devem pôr em evidência as aplicações a que uma certa teoria conduz, os capítulos segundo e terceiro referem-se a duas aplicações interessantíssimas da teoria das séries divergentes.

O capítulo segundo é constituido por uma ligeira aplicação à teoria do prolongamento analítico, *intimamente ligada ao estudo das séries divergentes.*

É claro que, o que expomos, é susceptível de generalizações. Mas, estas obrigar-nos-iam a alargar demasiadamente êste trabalho.

O capítulo terceiro trata das séries de Fourier, *tendo sobretudo em vista mostrar as vantagens, que para o seu estudo provém da exposição dos assuntos do primeiro capítulo.*

Pôrto, Novembro de 1930.

CAPÍTULO I

MÉTODOS SOMATÓRIOS DAS SÉRIES

I — Generalização do conceito de soma duma série

1) Segundo a teoria clássica das séries, estas são de duas naturezas diferentes — *convergentes* e *divergentes*.

Nessa teoria, as primeiras têm uma soma e as segundas não a têm.

É possível, porém, modificando convenientemente a definição de soma, atribuir somas a certas séries divergentes. A estas últimas chamamos *somas no sentido generalizado*, e corresponder-lhes há um método somatório, diferente do que se emprega com as séries convergentes.

Antes de tudo, notemos que para ter valor um processo que conduza à generalização da noção de soma duma série, é indispensável que as definições obedeçam a determinados preceitos. Assim, tratando-se de séries numéricas, a *soma no sentido generalizado* deve fazer corresponder a cada série da classe que se considera, um número tal que a sua substituïção pela série conduza a resultados exactos ou, pelo menos, quási sempre exactos. Tratando-se de séries de têrmos variáveis, as somas no sentido generalizado devem ser as funções, que dão origem a essas séries.

É necessário também, para que se trate realmente duma generalização, que a classe das séries, às quais seja aplicável um certo método para obter a soma no sentido generalizado,

compreenda a classe das séries convergentes. É esta a *condição de permanência,* e um método que conduza a somas generalizadas diz-se *regular,* quando se respeita esta condição.

A eficácia dum método está também ligada à possibilidade de efectuar operações com as séries da classe correspondente e à forma como nos conduz a proposições gerais, que apresentem como casos particulares teoremas conhecidos, da teoria clássica das séries convergentes.

Conforme o expõe o Sr. Borel, numa teoria de séries divergentes deve atribuir-se uma soma a séries que a não tinham. Mas, essa teoria deve permitir, por cálculos efectuados sôbre tais séries, demonstrar resultados que, enunciados independentemente de tôda a introdução de séries divergentes, constituam proposições rigorosas, ligadas às teorias clássicas. Além disso, para que sejam possíveis aplicações, é necessário que as regras do cálculo possam aplicar-se às séries divergentes estudadas.

Existem vários métodos somatórios, que nos conduzem a *somas generalizadas das séries.* Nós consideraremos apenas métodos que se obtêm, empregando factores de convergência.

2) Métodos somatórios por factores de convergência.

Seja dada uma série

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

e a ela façamos corresponder uma sucessão infinita de funções dum parâmetro r: $\varphi_0(r)$, $\varphi_1(r) \ldots \varphi_n(r) \ldots$, as quais tendam para a unidade, quando r tende para um limite r_0.

Suponhamos que a série

$$(2) \qquad u_0\varphi_0(r) + u_1\varphi_1(r) + u_2\varphi_2(r) + \ldots + u_n\varphi_n(r) + \ldots$$

seja convergente para valores de r, diferentes de r_0, e representemos por $S(r)$ a soma desta série.

Se $S(r)$ tiver um limite determinado, quando r tender para r_0, chamamos a êste limite *soma generalizada* de (1), correspondente à sucessão de factores de convergência empregada.

Para que êste método seja *regular*, não pode ser arbitrária a escolha dos factores de convergência.

O teorema seguinte, do Sr. Óscar Perron, é fundamental na teoria:

Seja $\varphi_i(r)$ $[i=0, 1, 2 \ldots]$ *uma sucessão infinita de funções do parâmetro r, que obedeçam às duas condições:*

a) $\lim_{r=\infty} \varphi_i(r) = 1$

b) $\lim_{n=\infty} \sum_0^n \left| \varphi_i(r) - \varphi_{i+1}(r) \right| \leq M$, *sendo M um número finito independente de r.*

Se a série (1) *fôr convergente, de soma S, a série* (2) *também é convergente. A soma de* (2), $S(r)$, *tende para o limite S, quando r crescer indefinidamente.*

Com efeito, ponhamos:

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i(r) - \varphi_{i+1}(r).$$

Uma transformação clássica, devida a Abel, permite-nos escrever:

$$\sum_0^n u_i \varphi_i(r) = \sum_0^n \Delta\varphi_i S_i + \varphi_{n+1} S_n .$$

Como $\sum_0^\infty \Delta\varphi_i$ é absolutamente convergente e as somas S_i são limitadas, é absolutamente convergente a série $\sum_0^\infty \Delta\varphi_i S_i$.

A função φ_{n+1} tende para uma função limite, quando n cresce indefinidamente, porque de *(b)* conclue-se a convergência absoluta das séries

$$(\varphi_1(r)-\varphi_0(r))+(\varphi_2(r)-\varphi_1(r))+\cdots$$

e

$$\varphi_0(r)+(\varphi_1(r)-\varphi_0(r))+(\varphi_2(r)-\varphi_1(r))+\cdots,$$

a última das quais tem por soma $\lim_{n=\infty} \varphi_{n+1}(r)$.

$\sum_0^n u_i\varphi_i$ tende, então, para um limite quando n cresce indefinidamente, e a série (2) é convergente, para qualquer valor de r.

Ponhamos:

$$S(r)=\lim_{n=\infty} \sum_0^n u_i\varphi_i(r).$$

Para demonstrar completamente o teorema, provemos que é $\lim_{r=\infty} S(r)=S$.

Temos:

$$S(r)=\lim_{n=\infty}\left[\sum_0^n \Delta\varphi_i S_i+S_n\left(\varphi_0(r)-\sum_0^n \Delta\varphi_i\right)\right]=$$

$$=S\varphi_0(r)+\sum_0^\infty \Delta\varphi_i\left(S_i-S\right).$$

Visto que tôdas as funções φ_i tendem para a unidade quando r cresce além de todo o limite, a última parte do teorema ficará demonstrada, provando que a soma da série convergente $\sum_0^\infty \Delta\varphi_i\left(S_i-S\right)$ é infinitamente pequena com $\frac{1}{r}$.

Por mais pequeno que seja o número positivo ε é possível fazer-lhe corresponder um número inteiro p, tal que a desigualdade $| S_i - S | < \frac{\varepsilon}{M}$ seja satisfeita para todos os valores de $i > p$.

Temos:

$$\left| \sum_0^\infty \Delta\varphi_i \left(S_i - S \right) \right| \leq \left| \sum_0^p \Delta\varphi_i \left(S_i - S \right) \right| + \left| \sum_{p+1}^\infty \Delta\varphi_i \left(S_i - S \right) \right|$$

$$< \left| \sum_0^p \Delta\varphi_i \left(S_i - S \right) \right| + \varepsilon$$

Atendendo então a (a), resulta:

$$\lim_{r=\infty} \sum_0^\infty \Delta\varphi_i \left(S_i - S \right) = 0,$$

o que demonstra o teorema.

Observação. — As condições do teorema serão satisfeitas, se os *factores de convergência* constituirem uma sucessão de funções positivas, inferiores à unidade, decrescentes, e obedecendo à condição $\lim_{r=\infty} \varphi_i(r) = 1$, qualquer que seja i.

Temos assim uma sucessão infinita de funções, que obedecem às condições do teorema, definida pelas fórmulas:

$$(4) \qquad \begin{gathered} 0 \leq \varphi_{i+1}(r) \leq \varphi_i(r) \leq 1 \qquad [i = 0, 1, 2 \ldots] \\ \lim_{r=\infty} \varphi_i(r) = 1. \end{gathered}$$

3) Como exemplo de sucessões de factores de convergência, que nos conduzem a somas de séries no sentido generalizado, consideremos aquela que é definida pela fórmula:

$$\varphi_i(r) = \left(\frac{r}{r+1} \right)^i, \qquad [i = 0, 1, 2 \ldots, \quad r > 0],$$

que dá origem a uma aplicação interessante.

É evidente que estes factores de convergência correspondem a um *método somatório regular,* porque são satisfeitas as condições do teorema de Óscar Perron.

Pondo $\left(\frac{r}{r+1}\right)^i = t^i$, vem

$$0 \leq t^{i+1} \leq t^i \leq 1 \quad \text{e} \quad \lim_{r=\infty} \varphi_i(r) = \lim_{t=1} t^i = 1 .$$

A aplicação dêstes factores de convergência permite-nos classificar de corolário do teorema de Perron, um teorema clássico de Abel, que vamos enunciar.

Seja $f(x)$ a soma duma série inteira, convergente no intervalo $(-R, +R)$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Esta função é contínua, para qualquer intervalo $(-R', +R')$, $R' < R$, porque a série é uniformemente convergente no último intervalo.

Abel estabeleceu o teorema seguinte, que se aplica para demonstrar que a série é ainda uniformemente convergente em todo o intervalo $(-R, +R)$, onde é, portanto, contínua a função:

Se a série inteira fôr convergente para $x = R$, a sua soma neste ponto é o limite para que tende $f(x)$, quando x conservando-se inferior a R, tender para êste valor.

Consideremos os factores de convergência $\left(\frac{x}{R}\right)^i$, sendo x um número positivo inferior a R, isto é, os factores t^i, e procuremos obter a soma no sentido generalizado de $\sum_0^\infty a_i R^i$.

Segundo o teorema de Óscar Perron, é, como se pretendia demonstrar:

$$\lim_{x=R} f(x) = \lim_{t=1} \sum_0^\infty a_i R^i t^i = f(R) .$$

4) Uma pregunta surge naturalmente:

Para qualquer sucessão de factores de convergência, dando origem a somas no sentido generalizado e obedecendo às condições do teorema de Perron, serão concordantes os resultados?

Dum modo geral a resposta não pode ser afirmativa.
Um exemplo justifica a resposta.

Consideremos a série de Euler

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$$

e procuremos obter a sua soma no sentido generalizado, empregando a sucessão de factores de convergência referida no último número.

Temos:

$$S=\lim_{t=1}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2}.$$

Continuemos a supor $0<t<1$ e determinemos a soma generalizada da mesma série, correspondente à sucessão

$$1, t^n, t^m, t^{n+m}, t^{2m}, t^{n+2m}, t^{3m}, \ldots \qquad [m>n>0],$$

que também nos conduz a um método somatório regular.

Vem:

$$S'=\lim_{t=1}\frac{1-t^n}{1-t^m}=\frac{n}{m}.$$

O Sr. Borel chama *canónica* a tôda a sucessão de factores de convergência, que aplicada à série

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

conduza a uma soma no sentido generalizado da forma $\frac{1}{1-z}$,

para valores de z a que não correspondem pontos da semi-recta $(+1, \infty)$.

Assim, se uma sucessão infinita $\varphi_i(r)$ fôr *canónica*, teremos $\lim_{r=\infty} \sum_0^\infty z^i \varphi_i(r) = \frac{1}{1-z}$, no domínio da estrêla rectilínea da função $\frac{1}{1-z}$, relativa ao ponto 0, em que o método somatório correspondente seja aplicável.

Teorema. — *Uma sucessão infinita de factores de convergência é canónica, quando sendo aplicada a uma série qualquer* $\sum a_n$, *tivermos*

$$\lim_{r=\infty} \sum_0^\infty a_i \varphi_i(r) = \lim_{r=\infty} \sum_0^\infty a_i \varphi_{i+p}, \tag{5}$$

qualquer que seja p, sempre que existam estes limites.

Temos, com efeito, efectuando a aplicação à série $\sum z^i$:

$$0 = \lim_{r=\infty} \left[\sum_0^\infty z^i \varphi_i - \sum_0^\infty z^i \varphi_{p+i} \right] =$$

$$= \lim_{r=\infty} \left[\varphi_0 + z\varphi_1 + \ldots + z^{p-1}\varphi_{p-1} + \sum_p^\infty z^i \varphi_i - \sum_0^\infty z^i \varphi_{p+i} \right],$$

ou

$$0 = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{p-1} + \lim_{r=\infty} \left[z^p \sum_0^\infty z^i \varphi_{p+i} - \sum_0^\infty z^i \varphi_{p+i} \right] =$$

$$= \frac{z^p - 1}{z - 1} + \left(z^p - 1 \right) \lim_{r=\infty} \sum_0^\infty z^i \varphi_{p+i}.$$

Vem, pois, como pretendiamos demonstrar:

$$\lim_{r=\infty} \sum_0^\infty z^i \varphi_{p+i} = \lim_{r=\infty} \sum_0^\infty z^i \varphi_i = \frac{1}{1-z}.$$

5) As sucessões *canónicas* de factores de convergência têm uma importância especial, por serem aquelas que conduzem a resultados notáveis na teoria do prolongamento analítico.

Com efeito, seja $f(x)$ uma função analítica, holomorfa na vizinhança do ponto 0.

No interior do círculo de convergência, que supomos de raio finito, sabemos que é:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Suponhamos determinada a estrêla da função, relativa a 0, e representemos por C uma curva fechada, interior a esta estrêla.

Temos também, para os pontos x interiores a C:

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(t)\,dt}{t-x} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(t)\,dt}{t}\left[1 + \frac{x}{t} + \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x}{t}\right)^n + \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^{n+1}}{1-\frac{x}{t}}\right] =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{x^{n+1} f(t)\,dt}{t^{n+1}(t-x)} .$$

Procuremos obter a *soma generalizada* da série $\sum a_n x^n$ (convergente ou não, conforme o domínio em que se tomem os valores x), empregando um método somatório regular, correspondente a uma sucessão de factores de convergência $\varphi_i(r)$.

Se o valor x e a sucessão forem tais que a série $\sum_0^\infty \varphi_i \left(\frac{x}{t}\right)^i$ seja uniformemente convergente sôbre C, para qualquer valor de r, podemos escrever:

$$\sum_0^\infty a_i x^i \varphi_i = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(t)\,dt}{t} \sum_0^\infty \varphi_i \left(\frac{x}{t}\right)^i .$$

Suponhamos ainda que $\sum_0^\infty \varphi_i \left(\frac{x}{t}\right)^i$ tenda uniformemente para o limite $\frac{1}{1-\frac{x}{t}}$, quando $\frac{1}{r}$ tende para zero:

Neste caso, temos mais:

$$\lim_{r=\infty} \sum_0^\infty a_i x^i \varphi_i = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(t)\,dt}{t-x} = f(x).$$

Concluimos, portanto, como enunciamos, que as sucessões *canónicas* estão indicadas naturalmente para serem empregadas com êxito no prolongamento analítico das funções, não sendo de modo algum arbitrária a escolha da função $\frac{1}{1-z}$, que interveio na definição apresentada no último número.

Baseados no teorema nêle demonstrado e no que acaba de ser dito, podemos, raciocinando sôbre a série $\sum z^n$, deduzir condições relativas às sucessões e ao domínio onde se pode efectuar o prolongamento analítico.

Assim, suponhamos a série $\sum \varphi_i z^i$ convergente para qualquer valor de r, numa área S interior à estrêla da função $\frac{1}{1-z}$, relativa a 0, e de modo que o limite

$$\lim_{r=\infty} \sum_{i=0}^\infty z^i \left(\varphi_i - \varphi_{i+1}\right) = 0$$

seja atingido uniformemente.

A sucessão *canónica* que seja considerada, aplicada à série de têrmo geral $a_n z^n$, faz-lhe corresponder uma *soma generalizada*, que coincide com a função, quando os pontos x e curvas C sejam escolhidos de maneira que, tomando t um valor qualquer sôbre a curva, a variável $z = \frac{x}{t}$ não saía da região S da somabilidade de $\frac{1}{1-z}$.

Concluimos também:

Para que um método somatório, correspondente a uma sucessão canónica, possa aplicar-se com êxito em matéria do prolongamento analítico, é necessário que a região S exceda o círculo de convergência da série de têrmo geral z^n.

Doutro modo, $\left|\frac{x}{t}\right|$ tem de ser inferior à unidade, e a série correspondente a $f(x)$, convergindo, mostra que os valores de x, que podemos considerar, são interiores ao círculo de convergência.

II — MÉTODO SOMATÓRIO DE CESÀRO

6) É importante a sucessão de factores de convergência, definida como se segue:

$$\varphi_0(n) = 1$$

(6)

$$\varphi_i(n) = \begin{cases} \frac{n}{n+k} \cdot \frac{n-1}{n+k-1} \cdots \frac{n+1-i}{n+k+1-i} & \text{para } i \leq n \\ 0 & \text{para } i > n \end{cases}$$

ou, explicitamente,

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 \\ \varphi_1 &= \frac{n}{n+k} \\ \varphi_2 &= \frac{n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1} &= \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n+k)(n+k-1)\ldots(k+2)} \\ \varphi_n &= \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)} \\ \varphi_{n+p} &= 0 \qquad [p = 1, 2, 3 \ldots], \end{aligned}$$

representando k um número inteiro e positivo fixo, e n um parâmetro que toma os valores 1, 2, 3 . . . .

Com esta sucessão, que é *canónica* como veremos, é respeitada a *condição de permanência.*

Conduz-nos a um *método somatório regular,* a que correspondem as *somas no sentido generalizado de Cesàro,* ou sejam limites de médias de somas, tomadas no sentido ordinário.

Seja dada a série $\sum_{0}^{\infty} u_n$ e designemos por S_n a soma dos $n+1$ primeiros têrmos.

A soma C_n^k de igual número de têrmos da série $\sum_{0}^{\infty} \varphi_i u_i$ é:

$$C_n^k = u_0 + \frac{n}{n+k} u_1 + \frac{n\,(n-1)}{(n+k)\,(n+k-1)} u_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\ldots 2}{(n+k)\ldots(k+2)} u_{n-1} + \frac{n\,(n-1)\ldots 2.1}{(n+k)\ldots(k+1)} u_n =$$

$$= \frac{\binom{n+k}{n} u_0 + \binom{n+k-1}{n-1} u_1 + \binom{n+k-2}{n-2} u_2 + \ldots + \binom{k+1}{1} u_{n-1} + u_n}{\binom{n+k}{n}}$$

ou

$$(7) \quad C_n^k = \frac{S_n + \binom{k}{1} S_{n-1} + \ldots + \binom{k+n-2}{n-1} S_1 + \binom{k+n-1}{n} S_0}{\binom{k+n}{n}}.$$

C_n^k é, pois, uma média linear, de coeficientes positivos, das somas $S_0, S_1, \ldots S_n$.

Se existir o limite de C_n^k, quando n cresce indefinidamente, a série proposta diz-se *somável* (C, k).

A *somabilidade* $(C, 0)$ exprime a convergência da série, pois que neste caso são iguais à unidade todos os factores de convergência e temos $C_n^0 = S_n$.

O caso de ser $k=1$ conduz-nos à expressão:

$$(8) \qquad C_n^1 = \frac{S_n + S_{n-1} + \dots + S_1 + S_0}{n+1},$$

e a soma da série proposta é então, no sentido generalizado, definida como sendo o limite da média aritmética das somas S_0, $S_1 \dots S_n$, quando n cresce indefinidamente.

Às fórmulas (7) e (8) podemos dar outra forma, introduzindo nelas as expressões das *somas iteradas de Cesàro.*

Ponhamos:

$$S_n^k = S_n + \binom{k}{1} S_{n-1} + \binom{k+1}{2} S_{n-2} + \dots + \binom{k+n-2}{n-1} S_1 + \binom{k+n-1}{n} S_0 .$$

Vêm as fórmulas

$$(7') \qquad C_n^k = \frac{S_n^k}{\binom{k+n}{n}} \qquad \text{e} \qquad (8') \qquad C_n^1 = \frac{S_n^1}{n+1} .$$

A expressão escrita de S_n^k tem um aspecto diferente daquele, que apresentam as somas de que Cesàro partiu para obter a somabilidade (C, k), mas fàcilmente podemos deduzir estas, exprimindo S_n^{k+1} em função de S_n^k, $S_{n-1}^k \dots S_0^k$.

Temos, com efeito:

$$S_n^{k+1} = S_n + \binom{k+1}{1} S_{n-1} + \dots + \binom{k+n-1}{n-1} S_1 + \binom{k+n}{n} S_0 ,$$

ou

$$\begin{aligned} S_n^{k+1} = {} & \left[S_n + \binom{k}{1} S_{n-1} + \dots + \binom{k+n-2}{n-1} S_1 + \binom{k+n-1}{n} S_0 \right] + \\ & + \left[S_{n-1} + \dots + \binom{k+n-3}{n-2} S_1 + \binom{k+n-2}{n-1} S_0 \right] + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + S_0 \end{aligned}$$

ou

$$S_n^{k+1} = S_n^k + S_{n-1}^k + \dots + S_1^k + S_0^k ,$$

atendendo a que é

$$\binom{p+q}{q} = \binom{p+q-1}{q} + \binom{p+q-1}{q-1} .$$

Temos, pois, o quadro:

$$\begin{aligned}
&S_n^0 = S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n \\
&S_n^1 = S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1} + S_n \\
&S_n^2 = S_0^1 + S_1^1 + \dots + S_{n-1}^1 + S_n^1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&S_n^k = S_0^{k-1} + S_1^{k-1} + \dots + S_{n-1}^{k-1} + S_n^{k-1} .
\end{aligned} \tag{9}$$

7) A eficácia do método somatório de Cesàro é limitada pelo teorema seguinte:

Para que uma série $\sum_0^\infty u_n$ *seja somável* (C, k), *é condição necessária que* $\frac{u_n}{n^k}$ *tenda para zero com* $\frac{1}{n}$.

Como, por hipótese, a série proposta é somável (C, k), sendo k um número finito, temos:

$$\lim_{n=\infty} C_n^k = \lim_{n=\infty} C_{n-1}^k = \dots = \lim_{n=\infty} C_{n-k-1}^k .$$

Ora, as expressões

$$C_n^k = \frac{S_n^k}{\binom{k+n}{n}} = k! \frac{S_n^k}{(k+n)(k+n-1)\dots(1+n)}$$

$$C_{n-1}^k = \frac{S_{n-1}^k}{\binom{k+n-1}{n-1}} = k!\,\frac{S_{n-1}^k}{(k+n-1)(k+n-2)\ldots n}$$

....

$$C_{n-k-1}^k = \frac{S_{n-k-1}^k}{\binom{n-1}{n-k-1}} = k!\,\frac{S_{n-k-1}^k}{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}$$

mostram que os denominadores são em todos os CC, que consideramos, infinitamente grandes equivalentes a n^k, quando n cresce indefinidamente.

Vem assim, designando por L um número finito:

$$\lim. \frac{S_n^k}{n^k} = \lim. \frac{S_{n-1}^k}{n^k} = \ldots = \lim. \frac{S_{n-k-1}^k}{n^k} = L\,.$$

E por ser

$$u_n = S_n - S_{n-1} = (S_n^1 - S_{n-1}^1) - (S_{n-1}^1 - S_{n-2}^1) =$$
$$= (S_n^2 - S_{n-1}^2) - 2(S_{n-1}^2 - S_{n-2}^2) + (S_{n-2}^2 - S_{n-3}^2) =$$
$$= (S_n^3 - S_{n-1}^3) - 3(S_{n-1}^3 - S_{n-2}^3) + 3(S_{n-2}^3 - S_{n-3}^3) - (S_{n-3}^3 - S_{n-4}^3) =$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$
$$= S_n^k - \binom{k+1}{1} S_{n-1}^k + \binom{k+1}{2} S_{n-2}^k - \ldots + (-1)^{k+1} S_{n-k-1}^k\,,$$

temos, como pretendíamos demonstrar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{n^k} = L\left[1 - \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} - \ldots + (-1)^{k+1}\right] = 0\,.$$

Como se vê, êste teorema não é mais que a generalização do teorema estabelecido para as séries convergentes, isto é, somáveis $(C, 0)$:

«Para que uma série seja convergente é *necessário* que o seu têrmo geral tenda para zero».

8) Para tornar comparáveis os métodos somatórios, que se obtêm dando a k vários valores, vamos demonstrar um teorema, que generaliza o de Óscar Perron, no caso das somabilidades (C, k).

Já sabemos que sendo uma série somável $(C, 0)$, sê-lo há (C, k), com a mesma soma *(condição de permanência)*.

Temos mais geralmente:

Se k' fôr um número superior a k, e se uma série $\sum_0^\infty u_n$ fôr somável (C, k), também é somável (C, k'), obtendo-se nos dois casos a mesma soma generalizada.

Por hipótese, existe o limite de C_n^k, quando n cresce indefinidamente, e é:

$$\lim_{n=\infty} C_n^k = \lim_{n=\infty} \frac{k!}{n^k} S_n^k = k!\, L\,.$$

O que pretendemos demonstrar, é que temos, supondo $k' > k$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{k!}{n^k} S_n^k = \lim_{n=\infty} \frac{k'!}{n^{k'}} S_n^{k'}\,.$$

Formemos as *diferenças iteradas*, correspondentes aos factores de convergência (6), substituindo k por k':

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i+1} = \frac{k'}{n+k'-i}\,\varphi_i$$

$$\Delta^2\varphi_i = \Delta\varphi_i - \Delta\varphi_{i+1} = \frac{k'(k'-1)}{(n+k'-i)(n+k'-i-1)}\,\varphi_i$$

$$\Delta^3\varphi_i = \Delta^2\varphi_i - \Delta^2\varphi_{i+1} = \frac{k'(k'-1)(k'-2)}{(n+k'-i)(n+k'-i-1)(n+k'-i-2)}\,\varphi_i$$

.....

$$\Delta^{k+1}\varphi_i = \Delta^k\varphi_i - \Delta^k\varphi_{i+1} = \frac{k'(k'-1)\ldots(k'-k)}{(n+k'-i)(n+k'-i-1)\ldots(n+k'-i-k)}\,\varphi_i\,.$$

A igualdade $C_n^{k'} = \sum_0^n \varphi_i u_i$ transforma-se, iterando k vezes a transformação de Abel, na seguinte:

$$C_n^{k'} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \frac{k'(k'-1)\dots(k'-k)}{(n+k'-i)(n+k'-i-1)\dots(n+k'-(k+i))} S_i^k,$$

e, atendendo a que é $C_n^{k'} = \frac{S_n^{k'}}{\binom{k'+n}{n}}$, resulta

$$S_n^{k'} = \sum_{i=0}^{n} \binom{k'-k+n-i-1}{n-i} S_i^k,$$

ou, mais explicitamente

$$(10)\quad S_n^{k'} = \binom{k'-k+n-1}{n} S_0^k + \binom{k'-k+n-2}{n-1} S_1^k + \dots + \binom{k'-k}{1} S_{n-1}^k + S_n^k.$$

Os têrmos que entram em (10) são da forma: $\binom{k'-k+n-i-1}{n-i} S_i^k$, isto é, são produtos de dois infinitamente grandes com $n-i$ e i, equivalentes a $\frac{(n-i)^{k'-k-1}}{(k'-k-1)!}$ e Li^k.

Como vamos procurar o limite para $n=\infty$ da expressão $\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}}$, podemos supor $n > 2p$, e escrever:

$$\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}} = \frac{S_n^k + \binom{k'-k}{1} S_{n-1}^k + \dots + \binom{k'-k+p-2}{p-1} S_{n-p+1}^k}{n^k} +$$

$$+ \frac{\binom{k'-k+p-1}{p} S_{n-p}^k + \dots + \binom{k'-k+n-p-2}{n-p-1} S_{p+1}^k}{n^{k'}} +$$

$$+ \frac{\binom{k'-k+n-p-1}{n-p} S_p^k + \dots + \binom{k'-k+n-1}{n} S_0^k}{n^{k'}},$$

em que o numerador da primeira fracção contém p têrmos, o da segunda $n-2p$ e o da última $p+1$.

Façamos crescer indefinidamente p e n, mas de modo que $\frac{p}{n}$ tenda para zero.

O numerador da primeira fracção é uma soma de quantidades, cada uma inferior em valor absoluto a $A n^k n^{k'-k-1} = A n^{k'-1}$, representando por A um número finito. O valor absoluto desta fracção é inferior a $A \frac{p}{n}$ e tende, portanto, para o limite zero.

O limite da terceira fracção é também zero, como se reconhece seguindo o mesmo raciocínio.

Consideremos a segunda fracção, isto é, procuremos obter o seu limite, que será, portanto, igual ao da fracção $\frac{S_n^{k'}}{n^{k'}}$.

Êste limite não é alterado pela substituïção de infinitamente grandes equivalentes.

Temos pois:

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_n^{k'}}{n^{k'}} = \frac{L}{(k'-k-1)!} \lim_{n,p=\infty} \frac{p^{k'-k-1}(n-p)^k + \ldots + (n-p-1)^{k'-k-1}(p+1)^k}{n^{k'}} =$$

$$= \frac{L}{(k'-k-1)!} \lim_{n,p=\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{p}{n}\right)^{k'-k-1} \left(1-\frac{p}{n}\right)^k + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n-p-1}{n}\right)^{k'-k-1} \left(1-\frac{n-p-1}{n}\right)^k \right] =$$

$$= \frac{L}{(k'-k-1)!} \lim_{n,p=\infty} \sum_{i=0}^{n-2p-1} \left[\left[\left(\frac{p+i}{n}\right)^{k'-k-1} \left(1-\frac{p+i}{n}\right)^k \right] \left[\frac{p+i+1}{n} - \frac{p+i}{n} \right] \right] =$$

$$= \frac{L}{(k'-k-1)!} \int_0^1 x^{k'-k-1}(1-x)^k \, dx = \frac{k!\,L}{k'!},$$

ou seja, como pretendíamos demonstrar:

$$k'! \lim_{n=\infty} \frac{S_n^{k'}}{n^{k'}} = k!\,L = k! \lim_{n=\infty} \frac{S_n^k}{n^k}.$$

9) *A sucessão definida pelas fórmulas* (6) *é canónica.*

Com efeito, o teorema do n.º 7 mostra que a série $\sum_0^\infty z^n$ não pode ser somável (C, k) fora do círculo de convergência, porque $\frac{|z^{n+1}|}{n^k}$ cresce indefinidamente com n, quando fôr $|z| > 1$.

Como o método somatório é regular, no interior do círculo de convergência a soma generalizada correspondente é $\frac{1}{1-z}$. O mesmo se dá nos pontos ordinários do círculo de convergência.

Para reconhecer a verdade desta última afirmação, escrevamos, sendo ω diferente de zero e i a unidade imaginária:

$$S_n = 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega} + \ldots + e^{ni\omega} = \frac{1 - e^{(n+1)i\omega}}{1 - e^{i\omega}}.$$

Temos:

$$C_n^1 = \frac{\sum_{j=0}^{n} (1 - e^{(j+1)i\omega})}{(n+1)(1 - e^{i\omega})} = \frac{1}{1 - e^{i\omega}} - \frac{e^{i\omega} - e^{(n+2)i\omega}}{(n+1)(1 - e^{i\omega})}$$

e

$$\lim_{n=\infty} C_n^1 = \frac{1}{1 - e^{i\omega}} = \frac{1}{1 - z}.$$

Assim, a série $\sum z^n$ é somável $(C, 1)$ e, portanto (C, k), nos pontos ordinários do círculo de convergência, onde entretanto a série diverge.

A soma generalizada que se obtem é sempre da forma $\frac{1}{1-z}$, quando o método é eficaz, o que prova que a sucessão (6) é *canónica.*

Concluimos do que fica dito, que a eficácia do método de Cesàro, em matéria do prolongamento analítico, se limita ao círculo de convergência.

Contudo, a ordem de grandeza dos coeficientes duma série inteira pode ser tal, que até nos pontos ordinários sôbre o círculo de convergência, o método seja ineficaz.

Porém, como veremos, tem êste método um belo campo de aplicação nas séries de Fourier.

10) É útil e interessante poder comparar os processos somatórios correspondentes a diferentes sucessões de factores de convergência. Vamos fazê-lo tomando para referência a somabilidade (C, k).

Isso permitir-nos há restringir a indeterminação, que existe, quando se determinam somas generalizadas por vários métodos, indeterminação a que já nos referimos.

Corresponde a esta questão o teorema seguinte devido ao Sr. Bromwich:

Se uma série $\sum_{0}^{\infty} u_n$ *fôr somável* (C, k) *e tiver para soma generalizada S, será somável por meio duma sucessão de factores de convergência, que obedeçam às condições seguintes:*

$$a)\quad \sum_{0}^{\infty} i^k \left| \Delta^{k+1} \varphi_i \right| < M, \text{ sendo } M \text{ independente de } r$$

$$b)\quad \lim_{i=\infty} i^k \varphi_i(r) = 0$$

$$c)\quad \lim_{r=\infty} \varphi_i(r) = 1.$$

Com efeito, repetindo k vezes a transformação de Abel, resulta:

$$\sum_{0}^{n} u_i \varphi_i(r) = \sum_{0}^{n} \Delta^{k+1} \varphi_i S_i^k + \left[\varphi_{n+1} S_n^0 + \Delta\varphi_{n+1} S_n^1 + \ldots + \Delta^k \varphi_{n+1} S_n^k \right].$$

Atendendo à condição *b)*, à forma como se obtêm as diferenças $\Delta^j \varphi_{n+1}$ $[j = 1, 2 \ldots k]$, e não esquecendo que k é um número finito, vem:

$$\sum_0^\infty u_i \varphi_i(r) = \sum_0^\infty \Delta^{k+1} \varphi_i S_i^k .$$

Como a série proposta é somável (C, k), as quantidades $\frac{S_i^k}{i^k}$ tendem para um limite, para $i = \infty$, e, atendendo a *a)*, concluimos que a série do segundo membro da última igualdade é convergente. Portanto, também o é a do primeiro membro, para qualquer valor finito de r.

Temos assim:

$$S(r) = \sum_0^\infty u_i \varphi_i(r) .$$

Demonstremos que é também:

$$\lim_{r=\infty} S(r) = \lim_{n=\infty} C_n^k = S .$$

O caminho a seguir é perfeitamente análogo àquele que nos conduziu à demonstração da parte correspondente do teorema de Perron (n.º 2), relativamente ao qual o de Bromwich é simplesmente uma generalização.

No teorema de Perron modificamos a expressão $\varphi_{n+1} S_n$ do segundo membro da igualdade que provém de aplicarmos a transformação de Abel, de modo a permitir-nos considerar $S(r)$ soma de duas funções de r. Uma destas funções é uma série cuja soma é infinitamente pequena com $\frac{1}{r}$, e a outra é da forma $\varphi_0 S$, que tende para o limite S quando $\frac{1}{r}$ tende para zero.

Aqui, vamos transformar $\Delta^k \varphi_{n+1} S_n^k$, sem esquecer que as quantidades limitadas que devem substituir S_i são C_i^k.

Podemos escrever:

$$\sum_0^n u_i \varphi_i(r) = \sum_0^n \binom{k+i}{i} \Delta^{k+1}\varphi_i C_i^k + \binom{k+n}{n} \Delta^k \varphi_{n+1} C_n^k + \delta ,$$

designando, para abreviar, por δ uma quantidade infinitamente pequena com $\frac{1}{n}$.

Ora, temos:

$$\sum_0^n \binom{k+i}{i} \Delta^{k+1}\varphi_i = (\Delta^k\varphi_0 - \Delta^k\varphi_1) + \binom{k+1}{1}(\Delta^k\varphi_1 - \Delta^k\varphi_2) +$$

$$+ \ldots + \binom{k+n}{n}(\Delta^k\varphi_n - \Delta^k\varphi_{n+1}) =$$

$$= \Delta^k\varphi_0 + \binom{k}{1}\Delta^k\varphi_1 + \ldots + \binom{k+n-1}{n}\Delta^k\varphi_n - \binom{k+n}{n}\Delta^k\varphi_{n+1} ,$$

ou

$$\binom{k+n}{n}\Delta^k\varphi_{n+1} = -\sum_0^n \binom{k+i}{i}\Delta^{k+1}\varphi_i + \varphi_0 +$$

$$+ \varphi_{n+1}\left[-\binom{k}{1}\binom{k+n-1}{n} + \binom{k}{2}\binom{k+n-2}{n-1} - \ldots + (-1)^k\binom{n}{n-k+1}\right] +$$

$$+ \varphi_{n+2}\left[\binom{k}{2}\binom{k+n-1}{n} - \binom{k}{3}\binom{k+n-2}{n-1} + \ldots + (-1)^k\binom{n+1}{n-k+2}\right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \varphi_{n+k}(-1)^k\binom{k+n-1}{n} ,$$

como se reconhece por meio dum cálculo simples, embora longo, atendendo a que é

$$\Delta^k\varphi_i = \varphi_i - \binom{k}{1}\varphi_{i+1} + \binom{k}{2}\varphi_{i+2} - \ldots + (-1)^k\varphi_{i+k} .$$

Assim, vem:

$$\sum_0^n u_i \varphi_i(r) = \sum_0^n \binom{k+i}{i} \Delta^{k+1} \varphi_i \left(C_i^k - C_n^k\right) + \varphi_0 C_n^k + \delta_1 C_n^k + \delta ,$$

sendo a quantidade δ_1 infinitamente pequena com $\frac{1}{n}$, em conseqüência da condição *b)*, porque os coeficientes de $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2} \cdots \varphi_{n+k}$ são infinitamente grandes com n de ordem $k-1$.

Temos, portanto, ainda:

$$S(r) = \sum_0^\infty \binom{k+i}{i} \Delta^{k+1} \varphi_i \left(C_i^k - S\right) + \varphi_0 S .$$

A demonstração acaba-se como no teorema de Perron, fazendo crescer indefinidamente r, e atendendo às condições *a)* e *c)*.

Observação. — O teorema do n.º 8 está compreendido neste, que acabamos de demonstrar.

Consideremos apenas o caso mais simples, o de nos ser dada uma série somável $(C, 1)$, e verifiquemos que o teorema de Bromwich nos permite afirmar que a mesma série também é somável (C, k'), sendo $k' > 1$.

Tudo se reduz a mostrar que os factores da sucessão (6) satisfazem às condições do teorema, fazendo nestas $k = 1$.

Todos estes factores tendem para a unidade quando n cresce indefinidamente e, portanto, tem lugar a condição *c)*.

Como as diferenças $\Delta^2 \varphi_i$ são positivas, temos

$$\sum_0^n i \left| \Delta^2 \varphi_i \right| = \sum_0^n i \, \Delta^2 \varphi_i = \left(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3\right) + 2\left(\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4\right) + \ldots + n\varphi_n =$$

$$= \varphi_1 < 1 .$$

É satisfeita a condição *a)*, para $M = 1$.

Também se verifica a condição *b)*, porque para $i > n$ é $\varphi_i = 0$ e, portanto

$$\lim_{i=\infty} i\,\varphi_i = 0 .$$

11) **Adição de séries somáveis (C, k).** — É evidente que qualquer método somatório regular, por factores de convergência, que atribua a duas séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ as somas generalizadas S e S', aplicado à série $\sum (a\,u_n + b\,v_n)$, sendo a e b constantes, dá origem à soma $a\,S + b\,S'$. Isto realiza-se, em particular, no método que dá origem às somas (C, k). Como Borel, dizemos que estes métodos satisfazem à *condição de distributividade.*

A adição de séries, convergentes ou divergentes, pode efectuar-se, somando têrmo a têrmo, sempre que o número delas seja finito, sendo a série que se obtem somável (C, k), desde que o grau de somabilidade das parcelas não exceda k.

12) **Multiplicação de séries somáveis (C, k).** — É sabido da teoria clássica das séries que, multiplicando segundo a regra de Cauchy duas séries convergentes, só podemos afirmar, com segurança, que a série produto é convergente, quando pelo menos uma das séries propostas fôr absolutamente convergente.

Uma generalização dessa teoria é dada pelo teorema:

a) Se duas séries $\sum u_n$ *e* $\sum v_n$ *forem convergentes, sendo as somas* S *e* S', *a série produto* $\sum w_n$ $[w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_n v_0]$, *é somável* $(C, 1)$ *e é* $\lim_{n=\infty} C_n^1 = S \times S'$.

b) Se as mesmas séries forem somáveis (C, k) *e* (C, k'), *sendo as somas generalizadas* S *e* S', *a série produto é somável* $(C, k + k' + 1)$ *e a sua soma generalizada é o produto* $S \times S'$.

a) Demonstremos a primeira parte do teorema.

Escrevamos:

$$S_n = \sum_0^n u_i \quad , \quad S'_n = \sum_0^n v_i$$

$$P_n = \sum_0^n w_i = \sum_0^n u_i S'_{n-i} .$$

S_n e S'_n tendem, por hipótese, para limites finitos quando $\frac{1}{n}$ tende para zero.

Teremos, sendo p um inteiro menor que $\frac{n}{2}$:

$$\frac{P_0 + P_1 + \ldots + P_n}{n+1} = \frac{S_0 S'_n + S_1 S'_{n-1} + \ldots + S_{p-1} S'_{n-p+1}}{n+1} +$$

$$+ \frac{S_p S'_{n-p} + S_{p+1} S'_{n-p-1} + \ldots + S_{n-p} S'_p}{n+1} +$$

$$+ \frac{S_{n-p+1} S'_{p-1} + S_{n-p+2} S'_{p-2} + \ldots + S_n S'_0}{n+1} .$$

Façamos crescer p e n indefinidamente, mas de modo que $\frac{p}{n}$ tenda para zero.

Como $n - p = n\left(1 - \frac{p}{n}\right)$ cresce indefinidamente com p e n, e atendendo a que a primeira e a terceira fracções, cujos numeradores são somas de p parcelas limitadas, tendem para o limite zero, vem:

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_0 + P_1 + \ldots + P_n}{n+1} = \lim_{p,\, n=\infty} \frac{S_p S'_{n-p} + \ldots + S_{n-p} S'_p}{n+1} =$$

$$= S \times S' \lim_{p,\, n=\infty} \frac{n - 2p + 1}{n} = S \times S' .$$

b) Por hipótese, as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ são somáveis (C, k) e (C, k'). Existem, portanto, os limites finitos:

$$k!\lim_{n=\infty}\frac{S_n^k}{n^k}=S \quad , \quad k'!\lim_{n=\infty}\frac{S_n'^{k'}}{n^{k'}}=S' .$$

Pretendemos demonstrar que é:

$$(k+k'+1)!\lim_{n=\infty}\frac{P_n^{k+k'+1}}{n^{k+k'+1}}=S\times S' .$$

Para isso, sigamos o caminho já estabelecido na primeira parte do teorema. As séries propostas eram somáveis $(C, 0)$ e nós demonstramos a somabilidade $(C, 1)$ do produto, substituindo na expressão do têrmo geral desta série os produtos $u_i v_j$ por $S_i^0 S_j'^0$. Devemos agora substituir $u_i v_j$ por $S_i^k S_j'^{k'}$ para demonstrar a somabilidade $(C, k+k'+1)$.

Por ser:

$$P_n=u_0 S_n'+u_1 S_{n-1}'+\ldots+u_n S_0'=S_n v_0+S_{n-1} v_1+\ldots+S_0 v_n$$

$$P_n^1=u_0 S_n'^1+u_1 S_{n-1}'^1+\ldots+u_n S_0'^1=S_n S_0'+S_{n-1} S_1'+\ldots+S_0 S_n'$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^k=S_0^j S_n'^l+S_1^j S_{n-1}'^l+\ldots+S_n^j S_0'^l=S_n^l S_0'^j+S_{n-1}^l S_1'^j+\ldots+S_0^l S_n'^j \qquad [l+j+1=k]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^{k+k'+1}=S_0^k S_n'^{k'}+S_1^k S_{n-1}'^{k'}+\ldots+S_n^k S_0'^{k'}$$

teremos, escolhendo o inteiro p, como na primeira parte do teorema:

$$\frac{P_n^{k+k'+1}}{n^{k+k'+1}}=\frac{S_0^k S_n'^{k'}+\ldots+S_{p-1}^k S_{n-p+1}'^{k'}}{n^{k+k'+1}}+\frac{S_p^k S_{n-p}'^{k'}+\ldots+S_{n-p}^k S_p'^{k'}}{n^{k+k'+1}}+$$

$$+\frac{S_{n-p+1}^k S_{p-1}'^{k'}+\ldots+S_n^k S_0'^{k'}}{n^{k+k'+1}} .$$

Se p e n crescem indefinidamente, mas de modo que $\frac{p}{n}$ tenda para o limite zero, vem:

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n^{k+k'+1}}{n^{k+k'+1}} = \lim_{p,\, n=\infty} \frac{S_p^k S_{n-p}^{k'} + \ldots + S_{n-p}^k S_p^{k'}}{n^{k+k'+1}} =$$

$$= \frac{S \times S'}{k! \times k'!} \lim_{p,\, n=\infty} \frac{p^k (n-p)^{k'} + (p+1)^k (n-p-1)^{k'} + \ldots + (n-p)^k p^{k'}}{n^{k+k'+1}} =$$

$$= \frac{S \times S'}{k! \times k'!} \lim_{p,\, n=\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{p}{n}\right)^k \left(1-\frac{p}{n}\right)^{k'} + \left(\frac{p+1}{n}\right)^k \left(1-\frac{p+1}{n}\right)^{k'} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n-p}{n}\right)^k \left(1-\frac{n-p}{n}\right)^{k'} \right] =$$

$$= \frac{S \times S'}{k! \times k'!} \int_0^1 x^k (1-x)^{k'}\, dx = \frac{S \times S'}{(k+k'+1)!},$$

ou

$$(k+k'+1)! \lim_{n=\infty} \frac{p_n^{k+k'+1}}{n^{k+k'+1}} = S \times S',$$

como pretendíamos demonstrar.

III — MÉTODOS SOMATÓRIOS EXPONENCIAIS

13) **Método somatório exponencial** (simples). — A sucessão infinita de factores de convergência, funções do parâmetro positivo r,

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_0(r) = 1 \\ \varphi_i(r) = 1 - e^{-r}\left(1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^{i-1}}{(i-1)!}\right) \end{cases} \qquad [i = 1, 2 \ldots]$$

corresponde a um método somatório regular, porque obedece às condições (4).

Apliquemos estes factores de convergência a uma série $\sum u_n$ e efectuemos a transformação de Abel:

$$\sum_0^n u_i \varphi_i(r) = \sum_0^n S_i e^{-r} \frac{r^i}{i!} + S_n \left[1 - e^{-r} \left(1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{2!} + \ldots + \frac{r^n}{n!} \right) \right].$$

Esta igualdade mostra que também somos conduzidos a um *método somatório regular,* tomando para *soma generalizada* duma série o limite:

$$(12) \quad \lim_{r=\infty} \sum_{i=0}^{\infty} S_i e^{-r} \frac{r^i}{i!} = \lim_{r=\infty} \frac{S_0 + S_1 \frac{r}{1} + S_2 \frac{r^2}{2!} + \ldots + S_i \frac{r^i}{i!} + \ldots}{e^r},$$

e êste *método* denomina-se *somatório exponencial.*

Como o de Cesàro, pode incluir-se nos métodos somatórios por médias.

Consistem estes, dum modo geral, no seguinte:

Seja dado um quadro rectangular de quantidades, que se prolonga indefinidamente para a direita e para baixo

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0i} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j0} & a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

A sucessão duplamente infinita de quantidade a_{ji}, convenientemente escolhida, pode conduzir-nos a um método somatório regular de séries, sendo a *soma generalizada* o limite da sucessão infinita

$$\frac{a_{j0} S_0 + a_{j1} S_1 + \ldots + a_{ji} S_i + \ldots}{a_{j0} + a_{j1} + \ldots + a_{ji} + \ldots} \qquad [j = 0, 1, 2 \ldots].$$

Assim, para o método somatório exponencial, podemos considerar o quadro

$$
\begin{array}{|l}
1 \quad \frac{r_1}{1} \quad \frac{r_1^2}{2!} \dots \frac{r_1^i}{i!} \dots \\
1 \quad \frac{r_2}{1} \quad \frac{r_2^2}{2!} \dots \frac{r_2^i}{i!} \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
1 \quad \frac{r_j}{1} \quad \frac{r_j^2}{2!} \dots \frac{r_j^i}{i!} \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{array}
$$

representando por r_1, $r_2 \dots$ uma sucessão crescente e infinita de quantidades positivas.

À soma generalizada correspondente a êste método pode dar-se a forma:

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} s(r),$$

convencionando escrever

$$(13) \qquad s(r) = S_0 + S_1 \frac{r}{1} + S_2 \frac{r^2}{2!} + \dots + S_i \frac{r^i}{i!} + \dots .$$

O método tem principalmente valor, quando a série (13) fôr uniformemente convergente para $r > 0$, isto é, quando $s(r)$ fôr uma função inteira, e é neste campo que nos colocamos.

14) **Método somatório exponencial sob a forma de integral.** — Suponhamos a sucessão de factores de convergência, definida pela fórmula:

$$(14) \qquad \psi_i(r) = 1 - e^{-r}\left[1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots + \frac{r^i}{i!}\right] =$$

$$= \frac{1}{i!}\int_0^r e^{-t} t^i \, dt \qquad [r > 0, \quad i = 0, 1, 2 \ldots] .$$

Esta sucessão também nos conduz a um *método somatório regular de séries* e devemos notar que os factores (14) estão ligados com os definidos por (12), pela relação

$$\varphi_{i+1} = \psi_i .$$

Seja dada uma série $\sum u_n$. Quando a série $\sum_0^\infty u_i \psi_i$ fôr convergente para r finito e existir o limite

$$\lim_{r=\infty}\left[\lim_{n=\infty} \sum_0^n u_i \psi_i\right],$$

a série é somável pela sucessão de factores de convergência (14).

Ponhamos:

$$u(r) = u_0 + u_1 \frac{r}{1} + u_2 \frac{r^2}{2!} + \ldots + u_i \frac{r^i}{i!} + \ldots .$$

O método, que expomos, é denominado *método somatório exponencial sob a forma de integral* e terá, sobretudo, valor quando $u(r)$ fôr uma função inteira, para $r > 0$. Nós suporemos que o aplicamos sòmente a séries, que conduzam a êste resultado, e chamamos a $u(r)$ a *função inteira associada da série.*

Assim, a soma generalizada toma a forma:

$$\lim_{r=\infty}\left[\lim_{n=\infty} \sum_0^n u_i \psi_i\right] = \int_0^\infty e^{-t} u(t) \, dt ,$$

e existe sempre que exista o integral escrito, conhecido por *integral de Borel.*

Goza êste método, como veremos, duma eficácia superior à do método exponencial, referido no último número, sendo já de prever uma ligação íntima entre os dois métodos, em virtude da relação que existe entre os factores de convergência (12) e (14).

15) *Se* $s(r)$ *fôr uma função inteira,* $u(r)$ *também é uma função inteira.*

Com efeito, como $s(r)$ admite derivada, temos:

$$s'(r) = S_1 + S_2 \frac{r}{1} + S_3 \frac{r^2}{2!} + \ldots + S_i \frac{r^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots$$

e

$$s'(r) - s(r) = (S_1 - S_0) + (S_2 - S_1)\frac{r}{1} + \ldots + (S_i - S_{i-1})\frac{r^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots ,$$

sendo estas séries uniformemente convergentes.

Temos mais:

$$\int_0^r \left[s'(t) - s(t) \right] dt = \int_0^r \left[\sum_{i=1}^{\infty} (S_i - S_{i-1}) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \right] dt$$

$$= u_1 \frac{r}{1} + u_2 \frac{r^2}{2!} + u_3 \frac{r^3}{3!} + \ldots + u_i \frac{r^i}{i!} + \ldots = u(r) - u_0 .$$

É, portanto, como pretendíamos provar, inteira a função

$$u(r) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \frac{r^i}{i!} .$$

16) Podemos escrever:

$$u(r) = u_0 + \int_0^r \left[s'(t) - s(t) \right] dt = s(r) - \int_0^r s(t)\, dt ,$$

e também

$$(15) \qquad u'(r) = s'(r) - s(r) = u_1 + u_2 \frac{r}{1} + \ldots + u_i \frac{r^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots ,$$

donde

$$(16) \qquad u_0 + \int_0^r e^{-t} u'(t)\, dt = e^{-r} s(r) .$$

Teorema. — *Se uma série fôr somável pelo método somatório exponencial e tiver por soma generalizada S, será também somável pelo método somatório exponencial sob a forma de integral, com a mesma soma generalizada.*

Como partimos da hipótese de que é

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} s(r) = S ,$$

sendo $s(r)$ uma função inteira, podemos então escrever

$$(17) \qquad S - u_0 = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left[e^{-t} s(t) \right] dt = \int_0^\infty e^{-t} u'(t)\, dt ,$$

e está assim provado que tem um valor determinado o integral $\int_0^\infty e^{-t} u'(t)\, dt$.

Para o teorema ficar demonstrado, só falta deduzir que a existência dêste integral assegura a existência do integral $\int_0^\infty e^{-t} u(t)\, dt$, e além disso que é:

$$\int_0^\infty e^{-t} u(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} u'(t)\, dt + u_0 .$$

Por ser $u'(t)$ uma função contínua, vem:

$$(18) \qquad \int_0^r e^{-t} u'(t)\,dt = e^{-r} u(r) - u_0 + \int_0^r e^{-t} u(t)\,dt ,$$

ou

$$\varphi(r) + \varphi'(r) = f(r) + u_0 ,$$

pondo

$$\varphi(r) = \int_0^r e^{-t} u(t)\,dt \quad , \quad \varphi'(r) = e^{-r} u(r)$$

$$f(r) = \int_0^r e^{-t} u'(t)\,dt .$$

Estamos assim em presença duma *equação diferencial linear de primeira ordem,* considerando $\varphi(r)$ uma função desconhecida e $f(r)$ uma função dada.

Qualquer determinação da função φ está compreendida na expressão do integral geral, que é

$$\varphi(r) = e^{-r} \left[\int_{r_0}^r e^t \left(f(t) + u_0 \right) dt + C \right] .$$

Temos, pois:

$$\lim_{r=\infty} \varphi(r) = u_0 + \lim_{r=\infty} \left[e^{-r} \int_{r_0}^r e^t f(t)\,dt \right] =$$

$$= u_0 + \lim_{r=\infty} \left[e^{-r} \int_R^r e^t f(t)\,dt \right] ,$$

qualquer que seja o número R, compreendido entre r_0 e r.

Mas, por ser $\lim_{t=\infty} f(t) = S - u_0$, podemos dar a R uma sucessão crescente de valores, de modo a obtermos que $e^{-r} \int_R^r e^t f(t)\,dt$ e $e^{-r} \int_R^r e^t (S - u_0)\,dt$ defiram de quantidades, em valor absoluto tão pequenas, quanto se queira.

Assim, resulta:

$$\lim_{r=\infty} \varphi(r) = u_0 + \lim_{r=\infty} \left[e^{-r} \int_R^r e^t (S - u_0)\, dt \right] = S ,$$

ou, seja, como pretendíamos demonstrar:

$$\int_0^\infty e^{-t} u(t)\, dt = S .$$

Observação. — Da igualdade (18) concluimos, depois do resultado obtido, e mediante as condições do teorema, que é:

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} u(r) = 0 .$$

Teorema recíproco. — *Se uma série tiver uma soma generalizada S, correspondente ao método somatório exponencial sob a forma de integral, obtém-se a mesma soma generalizada empregando o método exponencial (simples), se tiver lugar a condição*

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} u(r) = 0 .$$

Temos, na verdade:

$$\int_0^r e^{-t} u(t)\, dt = -e^{-r} u(r) + u_0 + \int_0^r e^{-t} u'(t)\, dt ,$$

e resulta

$$\lim_{r=\infty} \int_0^r e^{-t} u'(t)\, dt = S - u_0 ,$$

ou, atendendo a (16),

$$S = \lim_{r=\infty} e^{-r} s(r) ,$$

como pretendíamos demonstrar.

Está feita a comparação dos dois métodos exponenciais. O grupo das séries ao qual seja aplicável o método sob a forma de integral é mais vasto, do que o correspondente ao método somatório exponencial, simples, e contém tôdas as séries para as quais êste seja eficaz.

É indiferente a aplicação dos dois métodos, quando se realizar a condição $\lim_{r=\infty} e^{-r} u(r) = 0$.

17) *A sucessão de factores de convergência, definida pelas fórmulas* (14) *é canónica.*

Para o provar, basta verificar que a soma generalizada da série $\sum_0^\infty z^n$, obtida quando se emprega o método somatório correspondente, é $\frac{1}{1-z}$, sempre que exista.

A função inteira associada é e^{rz} e

$$\int_0^\infty e^{-t(1-z)}\, dt = \frac{1}{1-z},$$

quando a parte real de z fôr inferior à unidade.

A série é somável pelo integral de Borel, no semi-plano que tem por origem a recta $x = 1$ e contém o eixo dos yy.

Como neste domínio é:

$$\lim_{r=\infty} e^{-r} . e^{rz} = 0 ,$$

a série também é somável, no domínio referido, pelo método exponencial sem forma de integral.

Dêste resultado, conclui-se que qualquer dos métodos exponenciais goza da propriedade de se poder empregar, eficazmente, na teoria do prolongamento analítico.

18) Nos métodos somatórios exponenciais pode fazer-se uma classificação por graus de somabilidade, como fizemos com relação aos métodos somatórios por somas de Cesàro, o que terá utilidade no que se segue.

Consideremos as sucessões de funções:

$$s(r)\ ,\ s'(r)\ ,\ s''(r)\ \ldots\ s^{(p)}(r)\ \ldots$$

$$u(r)\ ,\ u'(r)\ ,\ u''(r)\ \ldots\ u^{(p)}(r)\ \ldots\ ,$$

em que $s^{(p)}(r)$ e $u^{(p)}(r)$ são as derivadas de ordem p de $s(r)$ e $u(r)$.

Se uma destas funções fôr inteira, tôdas as outras o são, e nós supomos que se verifica esta propriedade.

Então, atendendo às expressões destas funções e ao primeiro teorema do n.º 16, concluimos que se existe o limite $\lim_{n=\infty} e^{-r} s^{(p-1)}(r)$, é convergente o integral $I_p = \int_0^\infty e^{-t} u^{(p)}(t)\, dt$ e, portanto, são convergentes todos os integrais:

$$I_{p-1} = \int_0^\infty e^{-t} u^{(p-1)}(t)\, dt \ \ldots\ I_1 = \int_0^\infty e^{-t} u'(t)\, dt\ ,\ I_0 = \int_0^\infty e^{-t} u(t)\, dt\ .$$

Neste caso, a série correspondente diz-se *somável* (B, p).

Vê-se assim, que a somabilidade (B, p) tem como conseqüência a somabilidade $(B, p-1)$, mas a recíproca só é verdadeira, quando se realiza a condição $\lim_{r=\infty} e^{-r} u^{(p-1)}(r) = 0$.

Dizer que uma série é somável pelo *integral de Borel* equivale a dizer que é somável $(B, 0)$.

A somabilidade pelo método exponencial, sem forma de integral, é a somabilidade $(B, 1)$.

IV — Séries absolutamente somáveis

19) É sabido que as séries *absolutamente convergentes* ocupam na teoria clássica um lugar privilegiado, em virtude de poderem tratar-se como somas dum número finito de parcelas, debaixo do ponto de vista dos cálculos numéricos. Quando a convergência não é absoluta, a soma duma série depende da ordem em que se tomam os seus têrmos.

Esta circunstância deve, naturalmente, acentuar-se, quando o campo em que nos colocamos abrange séries divergentes. Por isso devemos aqui, em geral, considerar a ordem dum têrmo, como fazendo parte integrante do mesmo, não nos sendo até permitido, em todos os casos, tirar conclusões sôbre a somabilidade duma série, quando suprimimos um número finito de primeiros têrmos.

Com efeito, a fórmula (15) mostra-nos que $u'(r)$ é a função inteira associada da série que se obtém suprimindo o primeiro têrmo à que nos é dada $\sum_0^\infty u_n$. Da igualdade (17) concluimos, seguidamente, que, se existir o integral $\int_0^\infty e^{-t} u'(t)\,dt$, $\sum_1^\infty u_n$ é somável $(B, 0)$, e a soma generalizada obtém-se subtraindo u_0 à da série proposta, que é somável $(B, 1)$. Porém, se esta fôr apenas somável $(B, 0)$, $\sum_1^\infty u_n$ não é somável por métodos exponenciais.

Podemos, portanto, generalizando estes resultados, enunciar os seguintes corolários dos teoremas do n.º 16 e das considerações do n.º 18:

1.º *Uma série* $\sum_0^\infty u_n$ *é somável pelos métodos exponenciais, se fôr somável qualquer das séries* $\sum_i^\infty u_n$, *obtida dando a i um dos valores* 1, 2....

2.º *A somabilidade de* $\sum_0^\infty u_n$ *não tem como conseqüência necessária a somabilidade das séries* $\sum_i^\infty u_n$ $[i=1, 2...]$. *A somabilidade* (B, p) *da primeira impõe as somabilidades* $(B, p-1)$, $(B, p-2)...$ $(B, 0)$ *das séries que se formam dando a i sucessivamente os valores* 1, 2 ... *p.*

O que acabamos de expor, leva-nos a concluir a possibilidade de obter no campo das séries somáveis pelos métodos exponen-

ciais um grupo gozando de propriedades, que as aproximem das absolutamente convergentes, e para a teoria ser perfeita, êsse grupo deve compreender estas últimas.

É êle constituído pelas séries que Borel denomina *absolutamente somáveis*, e que passamos a definir:

Uma série $\sum_0^\infty u_n$ *diz-se absolutamente somável, quando forem convergentes os integrais:*

$$\int_0^\infty e^{-t} | u(t) | dt \, , \int_0^\infty e^{-t} | u'(t) | dt \ldots \int_0^\infty e^{-t} | u^{(p)}(t) | dt \ldots \, ,$$

qualquer que seja o número inteiro e positivo p.

As séries *absolutamente somáveis*, como se deduz do que ficou dito, gozam das seguintes propriedades:

1.ª *Se* $\sum_0^\infty u_n$ *fôr absolutamente somável, são absolutamente somáveis as séries* $\sum_i^\infty u_n$ $[i = 1, 2 \ldots]$.

2.ª *A soma generalizada de* $\sum_k^\infty u_n$ *obtém-se subtraindo a soma* $u_0 + u_1 + \cdots + u_{k-1}$ *à soma generalizada de* $\sum_0^\infty u_n$.

3.ª *Numa série absolutamente somável podemos, sem modificar a soma generalizada, permutar a ordem dum número limitado de têrmos, ou substituir êste número limitado de têrmos pela sua soma.*

Teremos ocasião de mostrar, que as séries a que nos referimos compreendem as que são absolutamente convergentes, e também possuem, além das já enunciadas, outras propriedades notáveis, que tornam útil a sua introdução na análise.

20) *Uma série absolutamente convergente é absolutamente somável.*

Com efeito, suponhamos absolutamente convergente a série $\sum_0^\infty u_n$. São também absolutamente convergentes as séries $\sum_i^\infty u_n$ $[i=1, 2 \ldots]$ e convergentes as séries $\sum_i^\infty v_n$ obtidas, pondo $|u_n| = v_n$.

Temos:

$$|u(r)| \leqslant v(r) \ , \ |u'(r)| \leqslant v'(r) \ldots |u^{(p)}(r)| \leqslant v^{(p)}(r) \ldots .$$

Representemos por S a soma da série $\sum_0^\infty v_n$. Como é regular o método somatório pelo integral de Borel, as igualdades

$$S = \int_0^\infty e^{-t} v(t)\, dt \ , \ S - v_0 = \int_0^\infty e^{-t} v'(t)\, dt \ldots$$

$$\ldots S - (v_0 + v_1 + \ldots + v_{p-1}) = \int_0^\infty e^{-t} v^{(p)}(t)\, dt \ldots$$

mostram que são convergentes os integrais dos segundos membros e, portanto, absolutamente convergentes os integrais

$$\int_0^\infty e^{-t} u(t)\, dt \ , \int_0^\infty e^{-t} u'(t)\, dt \ , \ \ldots \int_0^\infty e^{-t} u^{(p)}(t)\, dt \ldots ,$$

o que demonstra o teorema.

Nesta demonstração interveio a condição da convergência absoluta da série. Tratando-se duma série semi-convergente não podemos decidir, imediatamente, que seja absolutamente somável ou que o não seja.

O Sr. Hardy deu um exemplo duma série semi-convergente, não absolutamente somável. Vamos nós apresentar um exemplo duma série semi-convergente, que é absolutamente somável.

É o exemplo clássico da série semi-convergente:

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}+\ldots .$$

A função inteira associada é

$$u(r)=-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\frac{r}{1}-\frac{1}{3}\frac{r^2}{2!}+\frac{1}{4}\frac{r^3}{3!}-\ldots=$$

$$=-1+\frac{r}{2!}-\frac{r^2}{3!}+\frac{r^3}{4!}-\ldots ,$$

ou

$$u(r)=\frac{e^{-r}-1}{r}.$$

A soma da série é então:

$$(19)\qquad S=\int_0^{\infty} e^{-t}\,\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt .$$

Êste integral é convergente em conseqüência da teoria que expomos, e absolutamente convergente, porque todos os seus elementos têm o mesmo sinal (1).

A expressão geral das derivadas de $u(r)$:

$$(20)\qquad u^{(p)}(r)=(-1)^p p!\,\frac{e^{-r}\left[1+\frac{r}{1}+\frac{r^2}{2!}+\ldots+\frac{r^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{r^p}{p!}\right]-1}{r^{p+1}},$$

mostra que o mesmo raciocínio prova a convergência absoluta dos integrais $\int_0^{\infty} e^{-t}u^{(p)}(t)\,dt$ $[p=1,2\ldots]$, não esquecendo que

(1) É para notar que êste integral representa a diferença de dois integrais divergentes *(Cours d'analyse mathématique,* E. Goursat, t. I da 3.ª ed. n.º 94). Põe-se assim em evidência, que uma série semi-convergente pode considerar-se a diferença de duas séries de têrmos positivos, ambas divergentes, como é sabido da teoria clássica das séries convergentes.

$u^{(p)}(r)$ é a função inteira associada da série convergente, obtida suprimindo os p primeiros termos à proposta.

Esta é, pois, como enunciamos, absolutamente somável.

21) **Adição de séries absolutamente somáveis.** — *Se as séries* $\sum_0^\infty u_n$ *e* $\sum_0^\infty v_n$ *forem absolutamente somáveis, e tiverem as somas generalizadas* S *e* S', $\sum_0^\infty (a\,u_n + b\,v_n)$ *é tambem absolutamente somável com soma generalizada igual a* $a\,S + b\,S'$, *representando por* a *e* b *constantes.*

Esta propriedade é uma conseqüência imediata do que acabamos de expor.

22) **Multiplicação de séries absolutamente somáveis.** — *Se duas séries* $\sum_0^\infty u_n$ *e* $\sum_0^\infty v_n$ *forem absolutamente somáveis e tiverem as somas generalizadas* S *e* S', *o seu produto, obtido segundo a regra de Cauchy, é uma série absolutamente somável* $\sum_0^\infty w_n$, *que tem como soma generalizada* $S \times S'$.

Temos, por hipótese:

$$S = \int_0^\infty e^{-t}\,u(t)\,dt \qquad S' = \int_0^\infty e^{-s}\,v(s)\,ds\,,$$

sendo estes integrais absolutamente convergentes.

Assim,

$$S \times S' = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s}\,u(t)\,v(s)\,dt\,ds \tag{21}$$

é um integral duplo absolutamente convergente.

Efectuando a mudança de variáveis, definida pelas fórmulas

$$x = t + s$$

$$y = t - s,$$

resulta:

$$S \times S' = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \int_{-x}^{+x} \frac{1}{2}\, u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) dy,$$

onde sabemos que é

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) = u_0 + u_1 \frac{x+y}{2} + u_2 \frac{(x+y)^2}{2^2 . 2!} + u_3 \frac{(x+y)^3}{2^3 . 3!} + \cdots$$

$$v\left(\frac{x-y}{2}\right) = v_0 + v_1 \frac{x-y}{2} + v_2 \frac{(x-y)^2}{2^2 . 2!} + v_3 \frac{(x-y)^3}{2^3 . 3!} + \cdots$$

Como estas séries são absoluta e uniformemente convergentes, vem:

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i v_j \frac{(x+y)^i (x-y)^j}{2^{i+j}\, i!\, j!}$$

$$[i + j = n;\quad n = 0, 1, 2 \ldots].$$

Então resulta:

$$\int_{-x}^{+x} \frac{1}{2}\, u\, v\, dy = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_i v_j}{2^{i+j+1}\, i!\, j!} \int_{-x}^{+x} (x+y)^i (x-y)^j\, dy =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i v_j \frac{x^{i+j+1}}{(i+j+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

É também

$$S \times S' = \int_0^\infty e^{-x} \sum_0^\infty w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, dx$$

um integral absolutamente convergente.

Vê-se, claramente, que a última série define a *função inteira associada* de

$$0 + \sum_{n=0}^{\infty} w_n \,, \tag{22}$$

que é, portanto, somável.

Não está, porém, ainda demonstrado o teorema, porque não podemos, da somabilidade de (22), deduzir a somabilidade de $\sum_0^\infty w_n$. Mas, se demonstrarmos que (22) é absolutamente somável, então poderemos fazer igual afirmação, relativamente àquela série.

Como as séries propostas são absolutamente somáveis, é absoluta a convergência dos integrais

$$\int_0^\infty e^{-t} u^{(p)}(t)\, dt \,, \quad \int_0^\infty e^{-s} v^{(p)}(s)\, ds \qquad [p = 0, 1, 2 \ldots].$$

Ora, por ser $u'(t)$ a função inteira associada de $\sum_1^\infty u_n$, efectuando o produto desta série, absolutamente somável, pela série $\sum_0^\infty v_n$, somos conduzidos, repetindo os raciocínios feitos, ao integral absolutamente convergente

$$\left(S - u_0\right) \times S' = \int_0^\infty e^{-x}\, \theta\,(x)\, dx \,, \tag{23}$$

pondo

$$\theta(x) = u_1 v_0 \frac{x}{1} + (u_1 v_1 + u_2 v_0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + (u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)\frac{x^n}{n!} + \ldots =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) - u_0 v(x) .$$

Então, da convergência absoluta do integral (23) e do integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} v(x)\, dx ,$$

concluimos a convergência absoluta de

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) dx .$$

Mas, as séries $\sum_{h}^{\infty} u_n$ $[h = 2, 3 \ldots]$ são tôdas absolutamente somáveis, assim como as séries $\sum_{k}^{\infty} v_n$ $[k = 1, 2 \ldots]$ e, portanto, repetindo os mesmos raciocínios, concluimos a convergência absoluta dos integrais

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^p}{dx^p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) dx .$$

A série (22) é absolutamente somável, o mesmo acontecendo, portanto, à série $\sum_{0}^{\infty} w_n$, cuja soma generalizada é

$$S \times S' = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d}{dx}\left(\sum_{0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) dx = \int_0^{\infty} e^{-t} w(t)\, dt ,$$

ficando demonstrado o teorema.

V — SÉRIES INTEIRAS ABSOLUTAMENTE SOMÁVEIS

23) Com o fim de pôr bem em evidência a utilidade da teoria das séries absolutamente somáveis, vamos apresentar generalizações de teoremas relativos a séries inteiras convergentes. Seremos conduzidos ao resultado notável, que consiste em *definir uma função holomorfa por meio duma série divergente.*

É sabido que, se num ponto z_0, uma função $f(z)$ fôr susceptível dum desenvolvimento convergente, ordenado segundo as potências inteiras e positivas de z_0, é susceptível do desenvolvimento

$$(24) \qquad f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots ,$$

em qualquer ponto interior ao círculo, que tenha por centro a origem e raio igual a $|z_0|$. A função $f(z)$ é *holomorfa* no interior dêste círculo e as suas derivadas sucessivas são funções holomorfas, cujos desenvolvimentos em série se obtêm derivando, sucessivamente, a série de soma $f(z)$.

Suponhamos que a série representada em (24) seja *convergente* ou *divergente,* mas absolutamente somável no ponto $z = z_0$.

Vamos demonstrar os teoremas seguintes:

I — *A série* (24) *é absolutamente somável, em qualquer ponto do segmento que una a origem O ao afixo M de* z_0, *e define, portanto, sôbre* $\overline{OM}$, *uma função* $f(z)$ *que é a sua soma generalizada.*

II — *A expressão analítica da soma generalizada de* (24) *dá origem a uma função holomorfa* $\psi(z)$, *no interior do círculo de diâmetro* $\overline{OM}$, *embora só possamos afirmar que seja a soma generalizada da série* $[\psi(z) = f(z)]$ *sôbre* $\overline{OM}$.

III — *As derivadas de tôdas as ordens de* $\psi(z)$, *em qualquer ponto de* $\overline{OM}$, *excluindo M, são as somas generalizadas das séries obtidas, derivando têrmo a têrmo* (24).

IV — *A origem é um ponto singular de* $\psi(z)$, *se fôr nulo o raio de convergência de* (24).

I

Sendo a função inteira, associada de (24):

$$u(r,z)=u_0+u_1\frac{rz}{1}+u_2\frac{(rz)^2}{2!}+\ldots+u_n\frac{(rz)^n}{n!}+\ldots,$$

pretendemos demonstrar que os integrais

$$\int_0^\infty e^{-t}\left|\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left[u(t,z)\right]\right|dt \qquad [p=0,1,2\ldots] \tag{25}$$

são convergentes, qualquer que seja z do segmento $\overline{OM}$, supondo que essa convergência tem lugar para $z=z_0$.

Notando que a função $u(r,z)$ apenas depende de r e z sob a forma rz, podemos escrever:

$$u(r,z)=F(rz) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^p}{\partial r^p}\left[u(r,z)\right]=z^p F^{(p)}(rz),$$

resultando que os integrais (25) serão convergentes, quando o forem os integrais

$$\int_0^\infty e^{-t}\left|F^{(p)}(tz)\right|dt.$$

Se escrevermos $z_0=\rho_0 e^{i\omega_0}$, para qualquer ponto de $\overline{OM}$, é:

$$z=\rho e^{i\omega_0} \quad \text{e} \quad \rho<\rho_0,$$

e, efectuando nos últimos integrais a mudança de variáveis, definida pela fórmula $tz=xe^{i\omega_0}$, onde x é real, vê-se que êles são equivalentes a

$$\frac{1}{\rho}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\rho}}\left|F^{(p)}\left(xe^{i\omega_0}\right)\right|dx. \tag{26}$$

Como estes integrais são convergentes para $\rho = \rho_0$, também o são para $\rho < \rho_0$, e temos o teorema demonstrado.

À *soma generalizada* da série, para qualquer valor de z do segmento $\overline{OM}$, corresponde qualquer das expressões:

$$(27) \qquad f(z) = \int_0^\infty e^{-t} u(t, z)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} F(tz)\, dt =$$

$$= \frac{e^{i\omega_0}}{z} \int_0^\infty e^{-\frac{x e^{i\omega_0}}{z}} F\left(x e^{i\omega_0}\right) dx .$$

II

Consideremos a função

$$(28) \qquad \psi(z) = \frac{e^{i\omega_0}}{z} \int_0^\infty e^{-\frac{x e^{i\omega_0}}{z}} F\left(x e^{i\omega_0}\right) dx$$

que, como acabamos de ver, representa a soma generalizada de (24), quando z pertencer a $\overline{OM}$.

Pondo $z = z' e^{i\omega_0}$, (28) transforma-se em

$$\Psi(z') = \frac{1}{z'} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{z'}} F\left(x e^{i\omega_0}\right) dx .$$

Êste integral é *uniformemente convergente* para z' real, no domínio em que tenha lugar a condição

$$e^{-\frac{1}{z'}} < e^{-\frac{1}{\rho_0}},$$

e o mesmo tem lugar para qualquer valor imaginário de z', desde que seja:

$$\left| e^{-\frac{1}{z'}} \right| < e^{-\frac{1}{\rho_0}} .$$

Pondo $z' = \alpha + i\beta$ e, portanto, $\frac{1}{z'} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$,

a última condição realiza-se, quando fôr:

$$(29) \qquad \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} > \frac{1}{\rho_0}, \quad \text{ou} \quad \rho^2 - \alpha\rho_0 < 0 .$$

Neste domínio, $\Psi(z')$ é uma função uniforme e contínua de z'. O mesmo acontece, com relação à função $\psi(z)$, desde que z pertença ao domínio, que corresponde a (29).

Êsse domínio é o círculo considerado no enunciado do teorema.

Com efeito, como ω_0 é o ângulo polar de $\overline{OM}$, o afixo de z é o ponto de coordenadas (α, β), relativamente ao sistema de eixos formado por $\overline{OM}$ e pela perpendicular a êste conduzida por O.

Ora, se representarmos por α e ρ a abcissa e o raio vector dum ponto do plano, vê-se que é

$\rho^2 - \alpha\rho_0 < 0$ no interior do círculo de diâmetro $\overline{OM} = \rho_0$

$\rho^2 - \alpha\rho_0 > 0$ no exterior do mesmo círculo.

Para o teorema ficar completamente demonstrado, necessitamos provar que $\psi(z)$ tem uma derivada contínua, em cada ponto do mesmo círculo.

Derivemos ambos os membros de (28), em ordem a z:

$$\psi'(z) = -\frac{e^{i\omega_0}}{z^2}\int_0^\infty e^{-\frac{x e^{i\omega_0}}{z}} F\left(x e^{i\omega_0}\right) dx +$$

$$+ \frac{e^{2i\omega_0}}{z^3}\int_0^\infty x e^{-\frac{x e^{i\omega_0}}{z}} F\left(x e^{i\omega_0}\right) dx .$$

Se estes integrais forem uniformemente convergentes, $\psi'(z)$ é a derivada, contínua, de $\psi(z)$.

Ora, o primeiro integral do segundo membro, já sabemos que é uniformemente convergente, e vamos provar que o mesmo se dá relativamente ao último.

O integral

$$\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{z'}} \left| F\left(x e^{i\omega_0}\right) \right| dx ,$$

quando z' fôr real, é uniformemente convergente no domínio $0 < z' < \rho_0$, porque independentemente do valor de z' neste domínio, para um valor de $x > x_1$, é

$$x e^{-\frac{x}{z'}} < e^{-\frac{x}{\rho_0}} .$$

A demonstração acaba-se como anteriormente, ficando provado que $\psi(z)$ é holomorfa no interior do círculo de diâmetro $\overline{OM}$.

III

Sendo z um ponto do segmento $\overline{OM}$, sabemos que é

$$\psi(z) = f(z) = \int_0^\infty e^{-t} u(t,z)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} F(tz)\, dt .$$

À série, que se obtém derivando têrmo a têrmo (24)

$$(30) \qquad u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \ldots + n u_n z^{n-1} + \ldots$$

corresponde, como função inteira associada, a soma da série

$$(31) \qquad u_1 + 2u_2 \frac{rz}{1} + 3u_3 \frac{(rz)^2}{2!} + \ldots + n u_n \frac{(rz)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots ,$$

a que podemos dar a forma

$$(32) \qquad g(rz) = \frac{d}{d(rz)} \left[rz F'(rz) \right] .$$

Vamos demonstrar sucessivamente que (30) é absolutamente somável e que a sua soma generalizada é a derivada $f'(z)$, para qualquer ponto de $\overline{OM}$, excluido M.

Os integrais

$$\int_0^\infty e^{-t} \left| \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left[g(tz) \right] \right| dt \qquad [p = 0, 1, 2 \ldots]$$

serão convergentes, quando o forem os integrais

$$\int_0^\infty e^{-t} \left| g^{(p)}(tz) \right| dt .$$

Atendendo a (32) e ao resultado que se obtem, derivando p vezes ambos os membros dessa igualdade, vem, representando por A um número positivo finito

$$\int_0^A e^{-t} \left| g^{(p)}(tz) \right| dt \leq \int_0^A t e^{-t} \left| z F^{(p+2)}(tz) \right| dt +$$

$$+ (p+1) \int_0^A e^{-t} \left| F^{(p+1)}(tz) \right| dt .$$

Ora, é já sabido, que o segundo integral do segundo membro conserva sempre um sentido, quando A crescer além de todo o limite. E o primeiro integral goza da mesma propriedade no segmento $\overline{OM}$ (excluindo M), como se vê seguindo o raciocínio do teorema anterior, depois de ter feito a mudança de variáveis, definida pela fórmula, também já considerada, $tz = x e^{i\omega_0}$.

Então, independentemente dos valores de A e z (z pertencendo ao segmento $\overline{OM}$ e não coincidindo com M), podemos determinar um número N, tal que seja:

$$\int_0^A e^{-t} \left| g^{(p)}(tz) \right| dt < N .$$

Está provado que, para qualquer valor de p, $\int_0^\infty e^{-t} g^{(p)}(tz)\,dt$ é absoluta e uniformemente convergente e, portanto, que (30) é absolutamente somável.

Para demonstrar a segunda parte do teorema, teremos:

$$\int_0^\infty e^{-t} g(tz)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} \frac{d}{dt}\left[t F'(tz) \right] dt =$$

$$= \left[t e^{-t} F'(tz) \right]_0^\infty + \int_0^\infty t e^{-t} F'(tz)\,dt ,$$

sendo nula a expressão completamente integrada, em virtude da somabilidade absoluta de (24) impor a igualdade

$$\lim_{t=\infty} \left[t e^{-t} F'(tz) \right] = 0 .$$

Assim, a primeira derivada de $f(z)$, no domínio referido, é a soma generalizada da série (30), porque podemos escrever:

$$f'(z) = \int_0^\infty t e^{-t} F'(tz)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} g(tz)\,dt .$$

Os raciocínios repetem-se sucessivamente, para as derivadas de segunda ordem, terceira ordem, etc., e o teorema está completamente demonstrado.

IV

Supondo nulo o raio de convergência da série (24), vamos provar que a origem é um ponto singular de $\phi(z)$.

Com efeito, se a tese fôsse falsa, fazendo tender z para zero, seguindo o caminho $\overline{MO}$, $\phi(z)$ e as suas derivadas sucessivas tenderiam para u_0, u_1, $2!\,u_2$ .... Então, (24) seria o desenvolvimento de Taylor duma função holomorfa e, portanto, convergente.

Como êste resultado está em contradição com a hipótese de que se partiu, o teorema é verdadeiro.

24) O Sr. Borel resume as conclusões tiradas nos últimos números, nos seguintes teoremas:

Seja $P(u, u', u'' \ldots u^{(p)}, x)$ *um polinómio inteiro em u e suas derivadas* $u', u'' \ldots u^{(p)}$, *em que u representa uma série ordenada segundo as potências inteiras e positivas de z, absolutamente somável para* $z = z_0$, *e cujos coeficientes sejam séries inteiras em x, de raio de convergência superior a* $|z_0|$.

Substituindo u pela série correspondente e efectuando os cálculos como se fôsse convergente, obtém-se uma série absolutamente somável sôbre $\overline{OM}$ *(excluindo M), que define uma função holomorfa F, no círculo de diâmetro* $\overline{OM}$. *Esta função é a mesma que se obteria, substituindo u pela função holomorfa que a série respectiva define.*

Notando ainda que uma função holomorfa definida por uma série de coeficientes nulos é idênticamente nula e que, recìprocamente, uma função holomorfa definida por (24) não pode ser idênticamente nula, sem que sejam nulos todos os coeficientes da série, podemos ainda enunciar:

A função F será idênticamente nula quando todos os coeficientes da série correspondente sejam nulos e sòmente neste caso. A série u verifica então formalmente a relação

$$P(u, u', u'' \ldots u^{(p)}, x) = 0$$

e a função analítica correspondente verifica-a efectivamente.

O teorema estende-se, é claro, ao caso de na expressão de P considerarmos várias séries, em número finito, quando forem tôdas absolutamente somáveis para $z = z_0$.

25) Nos teoremas do n.º 23 não intervem a condição de ser diferente de zero o raio de convergência da série (24).

Porém, a aplicação das séries absolutamente somáveis à *teoria do prolongamento analítico*, faz-se supondo que o raio de convergência não é nulo e tem um valor finito.

Vamos por isso estabelecer, dentro desta hipótese, um teorema, de que faremos uso no capítulo segundo.

Teorema. — *Seja $f(z)$ uma função holomorfa no interior e sôbre um círculo C de diâmetro $\overline{OM}$, passando pela origem O. Suponhamos que o elemento analítico da função, relativo a O (ponto ordinário), seja a série* (24). *Esta série é absolutamente somável na área da elipse que tem como eixo maior o diâmetro $\overline{O'M'}$ dum círculo C', concêntrico de C, e para a qual O é um foco. A soma generalizada da série é uma função holomorfa de z, que coincide com $f(z)$ em tôda a elipse.*

Notemos, antes de tudo, que o facto de $f(z)$ ser holomorfa no interior e sôbre C, de centro a, mostra que o raio do círculo de convergência da série de Taylor $f(z)=\sum_{0}^{\infty} A_n(z-a)^n$ é superior a $|a|$.

Portanto, podemos determinar o círculo C', contendo um círculo γ de centro O, no qual a série (24) tenha por soma $f(z)$ e sendo a função ainda holomorfa no interior e sôbre C'.

Assim, temos:

$$u_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{(C')}\frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx \qquad [n=0,1,2\ldots], \tag{33}$$

sendo o desenvolvimento uniformemente convergente em γ e simplesmente formal fora dêste círculo.

Pretendemos demonstrar que êle é absolutamente somável no domínio referido.

A função inteira associada é:

$$u(r,z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{(C')}\frac{f(x)}{x}\left[1+\frac{rz}{x}+\frac{(rz)^2}{x^2\,2!}+\ldots+\frac{(rz)^n}{x^n\,n!}+\ldots\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{(C')}\frac{f(x)}{x}e^{\frac{rz}{x}}\,dx\,,$$

donde resulta que a soma generalizada tem por expressão

$$\int_0^{\infty} e^{-t} u(t,z)\, dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\infty} dt \int_{(C')} \frac{f(x)}{x} e^{t\left(\frac{z}{x}-1\right)} dx .$$

A série será absolutamente somável, no domínio da existência dos integrais

$$(34) \qquad \int_0^{\infty} e^{-t} \left| \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(t,z) \right| dt \qquad [p = 0, 1, 2 \ldots] .$$

Ora, temos para qualquer valor de p:

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{(C')} \left(\frac{z}{x}\right)^p \frac{f(x)}{x} e^{t\left(\frac{z}{x}-1\right)} dx \right| < M R' e^{-\varepsilon t} ,$$

se representarmos por M o máximo de $\left| \left(\frac{z}{x}\right)^p \frac{f(x)}{x} \right|$ sôbre C', por ε um número positivo, e se os valores de z pertencerem ao domínio definido pela desigualdade

$$(35) \qquad \text{parte real } \frac{z}{x} < 1 - \varepsilon .$$

Neste domínio da variável z, os integrais (34) são convergentes, como se deduz da comparação com o integral $\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} dt$, e, portanto, a série (24) é absolutamente somável.

Façamos a interpretação geométrica da desigualdade (35):

A equação

$$\text{parte real } \frac{z}{x} = 1 ,$$

que pode escrever-se com a forma

$$(36) \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} X + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} Y = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} ,$$

pondo

$$z = X + iY \quad \text{e} \quad x = \alpha + i\beta ,$$

representa, para cada ponto x de C', uma recta perpendicular àquela que se obtém unindo a origem ao ponto x.

Todos os pontos z situados para o lado da origem com relação a esta recta satisfazem à condição (35).

Quando o ponto x percorre a circunferência, a recta tem como envolvente uma curva, tal que o lugar das projecções de O sôbre as suas tangentes é C'. Esta envolvente é uma elipse de foco O e eixo maior $\overline{O'M'}$, e a todos os pontos que lhe sejam interiores correspondem valores de z, que satisfazem à condição (35).

No interior desta elipse, a série (24) é, pois, *absolutamente somável*, e a mesma propriedade subsiste para os pontos situados sôbre a curva, porque o círculo C' pode substituir-se por outro C'', concêntrico de C', mas de maior raio, no qual $f(z)$ seja ainda holomorfa, C'' dando origem a uma nova elipse homofocal da primeira e contendo-a.

A soma generalizada de (24) é uma função holomorfa na elipse, como se conclue dos teoremas do n.º 23.

Como esta soma coincide com $f(z)$ em γ e, portanto, em tôda a região do círculo C' que pertença à elipse, temos o teorema completamente demonstrado.

A elipse será tanto mais achatada, quanto menor fôr a diferença $R' - R$ dos raios dos círculos C' e C, mas contém sempre no seu interior o diâmetro $\overline{OM}$ de C.

Qualquer que seja esta elipse, podemos dizer que a série é *absoluta e uniformemente somável* no seu interior.

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO DAS SÉRIES ABSOLUTAMENTE SOMÁVEIS AO PROLONGAMENTO ANALÍTICO

26) **Definição.** — Sejam $f_1(z)$ e $f_2(z)$ duas funções holomorfas nas regiões planas A_1 e A_2, limitadas pelas curvas fechadas C_1 e C_2. Suponhamos que existe uma área A' comum a A_1 e A_2 e que, em A', seja

$$f_1(z) = f_2(z),$$

o que terá lugar sempre que nesta última área as duas funções tenham um único elemento analítico comum.

$f_2(z)$ *diz-se então o prolongamento analítico de* $f_1(z)$ *na área* $A_2 - A'$.

27) **Polígonos de somabilidade.** — Suponhamos que a série

$$(1) \qquad f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

tem um raio de convergência finito, diferente de zero, único caso que nos interessa, nesta teoria.

Os pontos singulares da função analítica $f(z)$ distribuem-se sôbre o plano, devendo pelo menos um encontrar-se sôbre o círculo de convergência de (1).

Suponhamos um caso simples, aquele em que existe um único ponto singular A, e consideremos a perpendicular Δ em A, ao segmento que une a origem das coordenadas com êste ponto.

A todos os pontos do plano, que se encontram para o mesmo lado da origem com relação a Δ, corresponde a somabilidade absoluta de (1).

Com efeito, a função é holomorfa em qualquer círculo C de diâmetro $\overline{OM}$, desde que M tenha por projecção ortogonal, sôbre a recta que une a origem ao ponto singular, um ponto da semi-recta $\overline{AO}$, que não coincida com A.

Como conseqüência do teorema do n.º 25 e da definição do n.º 26, podemos assim afirmar:

A soma generalizada de (1) *define o prolongamento analítico de* $f(z)$ *na parte do semi-plano de origem* Δ *(região de somabilidade), que fôr exterior ao círculo de convergência da série.*

Suponhamos que o número de pontos singulares seja finito, e distribuido de qualquer modo no plano.

As perpendiculares conduzidas em cada ponto singular às rectas, que os unem com a origem, formam um polígono como, por exemplo, o da figura 1,

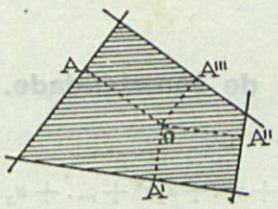

Fig. 1

que se denomina *polígono de somabilidade da série.*

Ainda que o número de pontos singulares seja infinito, o polígono de somabilidade pode ter um número finito de vértices,

sendo evidente que êste polígono pode ser fechado ou aberto, conforme a posição dos pontos singulares.

Os pontos singulares, em número infinito, podem dispor-se, por exemplo, sôbre uma linha *L*, completamente exterior ao *polígono de somabilidade*, como representa a figura 2.

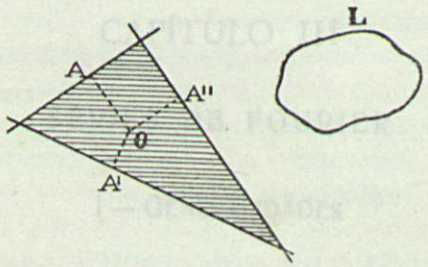

Fig. 2

Baseados no que acabamos de expor, podemos enunciar como propriedades dos polígonos de somabilidade:

1.ª *A área do polígono de somabilidade pode ser grande ou pequena, tudo dependendo da posição dos pontos singulares, mas nunca essa área poderá ser inferior à do círculo de convergência.*

2.ª *Para qualquer ponto que lhe seja interior, a série* (1) *é absolutamente somável, não o sendo para os pontos exteriores.*

3.ª *Para os pontos do contôrno pode ter ou deixar de ter lugar a somabilidade absoluta.*

CAPÍTULO III

SÉRIES DE FOURIER

I — GENERALIDADES

28) Uma série trigonométrica

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)$$

diz-se a *série de Fourier* correspondente à função integrável $f(x)$ [1], se os coeficientes forem constantes determinadas pelas fórmulas:

$$(2) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt \qquad [k = 0, 1, 2\ldots],$$

conhecidas por *fórmulas de Euler-Fourier.*

Assim, a tôda a função integrável, no intervalo $(0, 2\pi)$, corresponde uma série de Fourier, podendo escrever-se:

$$(3) \qquad f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right),$$

---

(1) Nós consideramos sòmente funções integráveis no sentido de Riemann, embora sejam possíveis generalizações. Mais geralmente, a tôda a função *somável,* isto é, integrável no sentido de Lebesgue, corresponde uma série de Fourier. Lebesgue dá exemplos de séries de Fourier convergentes, de funções não integráveis no sentido de Riemann.

desde que com esta notação pretendamos indicar simplesmente um *desenvolvimento formal.*

Não nos é permitido dizer que a série tem por soma $f(x)$, pois que Du Bois-Reymond e Lebesgue encontraram séries de Fourier, correspondentes até ao caso particular de $f(x)$ ser *contínua* com singularidades notáveis.

Du Bois-Reymond mostrou que a série de Fourier duma função contínua pode divergir.

Lebesgue mostrou que uma série de Fourier pode representar uma função contínua, convergindo, mas sem que convirja uniformemente num intervalo de continuïdade.

As fórmulas (2) podem obter-se substituindo o sinal $\sim$ de (3) pelo sinal $=$, multiplicando ambos os membros da igualdade por $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$, respectivamente, e integrando ambos os membros entre os limites $(0, 2\pi)$.

Assim, a singularidade de Du Bois-Reymond põe em evidência que para obter o integral duma função susceptível dum certo desenvolvimento em série só podemos integrar, com segurança, têrmo a têrmo, quando a série seja uniformemente convergente.

A singularidade de Lebesgue mostra que a convergência uniforme duma série de têrmos contínuos é condição suficiente, mas não necessária para que a soma seja uma função contínua.

Veremos nesta dissertação, como podem construir-se funções contínuas, com relação às quais se apresentam aquelas singularidades.

Dirichlet estabeleceu condições suficientes, para que uma função seja susceptível dum desenvolvimento convergente em série de Fourier.

As condições de Dirichlet foram generalizadas, conduzindo a critérios de convergência aplicáveis a classes extensas de funções, critérios que apresentam aspectos diferentes, conforme estabelecem hipóteses sôbre $f(x)$ no intervalo $(0, 2\pi)$, ou simplesmente estabelecem essas hipóteses na vizinhança dum ponto do intervalo.

Dão assim lugar a conclusões sôbre a convergência em todo o intervalo, particularmente sôbre a convergência uniforme, ou conduzem a resultados puramente locais.

Não faremos uma exposição completa sôbre séries de Fourier. Limitar-nos hemos a considerações que nos conduzem a alguns critérios de convergência, sendo nosso fim principal apontar as irregularidades e mostrar a vantagem, que existe na aplicação dos métodos, que expusemos para obter somas no sentido generalizado.

Uma função soma duma série de Fourier é evidentemente periódica, e de período 2π, o que não quer, porém, dizer que só possamos definir por séries de Fourier funções desta natureza.

Com efeito, empregam-se estas séries para definir *funções arbitrárias,* isto é, funções cuja maneira de ser num certo domínio, qualquer que êste seja, não arrasta qualquer restrição relativa à sua determinação fora dêsse domínio.

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo (a, b), tal que coincidam os seus valores inicial e final.

A mudança de variáveis, correspondente à fórmula

$$x = a + \frac{b-a}{2\pi} x_1,$$

transforma $f(x)$ numa função $\varphi(x_1)$, definida no intervalo $(0, 2\pi)$ e que neste intervalo toma os mesmos valores de $f(x)$.

Esta função pode seguidamente substituir-se por outra de período 2π, que no intervalo $(0, 2\pi)$ tome os mesmos valores da primeira.

A série de Fourier que defina esta função periódica, define a função proposta no intervalo (a, b).

Se fôr $f(a) \neq f(b)$, a substituïção de $\varphi(x_1)$ por uma função periódica pode ainda fazer-se, coincidindo os valores da nova

função com os da primeira, quando são excluidos os extremos do intervalo.

A função periódica, que é de facto aquela que se desenvolve em série de Fourier, em geral, apresenta descontinuïdades nos pontos $2k\pi$ $[k=0, 1, 2\ldots]$, e a série de Fourier que a defina, define a função proposta no intervalo (a, b), desde que sejam excluidos os extremos.

Nós colocamo-nos, em geral, no campo seguinte:

1.º $f(x)$ *é uma função periódica de período* 2π.

2.º $f(x)$ *é uma função absolutamente integrável, isto é, tal que* $|f(x)|$ *seja integrável.*

II — CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

29) Estabelecido o desenvolvimento (3), para deduzir condições de convergência, vamos somar os $n+1$ primeiros têrmos e ver quando a expressão obtida tende para o limite $f(x)$, crescendo n indefinidamente.

Consideremos juntamente com a série de Fourier correspondente a $f(x)$ a chamada *série conjugada*

$$(4) \qquad \sum_{1}^{\infty} \left(b_k \cos kx - a_k \operatorname{sen} kx\right),$$

que se obtém permutando os coeficientes a_k e b_k, e substituindo x por $-x$, e representemos por S_n e S'_n as somas de ordem n das duas séries.

Temos:

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] f(t)\,dt$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k(t-x)\right] f(t)\,dt\,.$$

Como a função admite o período 2π, podemos escrever

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right] f(x+t)\,dt$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} kt\right] f(x+t)\,dt,$$

ou, decompondo cada integral em soma de dois integrais, em que a diferença entre os limites seja π e, mudando t em $-t$ nos integrais de limite inferior $-\pi$,

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]\left[f(x+t)+f(x-t)\right] dt$$

$$S'_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} kt\right]\left[f(x+t)-f(x-t)\right] dt.$$

Multipliquemos ambos os membros da segunda igualdade pela unidade imaginária e somemos as duas membro a membro:

$$S_n + iS'_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt + i\operatorname{sen} kt)\right] f(x+t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt - i\operatorname{sen} kt)\right] f(x-t)\,dt.$$

Como é

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt + i\operatorname{sen} kt) = \sum_{k=0}^{n}(\cos kt + i\operatorname{sen} kt) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2e^{(n+1)it} - e^{it} - 1}{2(e^{it}-1)} = \frac{e^{(n+\frac{1}{2})it} - \cos\frac{1}{2}t}{2i\operatorname{sen}\frac{1}{2}t} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t} + i\frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}$$

e mudando t em $-t$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt - i \operatorname{sen} kt)=\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}-i\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t},$$

podemos escrever:

$$S_n+iS'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}dt+$$

$$+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x-t)\right]\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}dt.$$

Assim, temos, finalmente, para expressões das somas de ordem n, com relação às duas séries:

$$(5)\quad\begin{cases} S_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}dt \\ S'_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x-t)\right]\frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}dt. \end{cases}$$

30) **Condições de convergência.** — Vamos procurar condições em que tenham lugar as igualdades:

$$(6)\quad\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} S_n=f(x) \\ \lim\limits_{n=\infty} S'_n=f_1(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\left[f(x+t)-f(x-t)\right]\operatorname{cotg}\frac{1}{2}t\,dt. \end{cases}$$

Da igualdade que resulta do cálculo feito no último número

$$\frac{1}{2}+\sum_{1}^{n}\cos kt=\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t},$$

deduz-se que é

$$(7) \qquad 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\,dt\,.$$

Subtraindo, membro a membro, a primeira igualdade (5) e aquela que se obtém multiplicando ambos os membros de (7) por $f(x)$ e atendendo às segundas igualdades (5) e (6), vem representando por R_n e R'_n as diferenças $f(x) - S_n$ e $f_1(x) - S'_n$:

$$(8) \begin{cases} R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[2f(x) - \left[f(x+t)+f(x-t)\right]\right] \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\,dt \\ R'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x+t)-f(x-t)\right] \frac{cos\,(n+\frac{1}{2})\,t}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\,dt\,. \end{cases}$$

As séries convergirão para $f(x)$ e $f_1(x)$, quando fôr possível fazer corresponder a qualquer número positivo δ um número N, tal que seja:

$$|R_n| < \delta \quad \text{e} \quad |R'_n| < \delta$$

para

$$n > N.$$

A convergência será uniforme num intervalo, quando N fôr independente dos valores que toma x no intervalo.

Para achar classes de funções susceptíveis de darem origem a séries de Fourier convergentes, torna-se, portanto, necessário estudar os integrais (8).

Para facilitar a exposição, começaremos por estabelecer alguns lemas.

31) 1.º *Seja* $\varphi(x)$ *uma função contínua num intervalo* (a, b). *Os integrais*

$$(9) \qquad I = \int_a^b \varphi(x)\,sen\,kx\,dx \quad , \quad I' = \int_a^b \varphi(x)\,cos\,kx\,dx$$

tendem para o limite zero, quando k *cresce indefinidamente.*

Como a demonstração é a mesma para os dois integrais, limitamo-nos a considerar o primeiro.

Efectuando a mudança de variáveis definida pela fórmula

$$x = t + \frac{\pi}{k},$$

vem:

$$I = -\int_{a-\frac{\pi}{k}}^{b-\frac{\pi}{k}} \varphi\left(t+\frac{\pi}{k}\right) \operatorname{sen} kt\, dt$$

e

$$2I = \int_a^b \left[\varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right] \operatorname{sen} kx\, dx - \int_{a-\frac{\pi}{k}}^{a} \varphi\left(x+\frac{\pi}{k}\right) \operatorname{sen} kx\, dx +$$

$$+ \int_{b-\frac{\pi}{k}}^{b} \varphi\left(x+\frac{\pi}{k}\right) \operatorname{sen} kx\, dx .$$

Em virtude da continuïdade de $\varphi(x)$, todos estes integrais tendem para zero com $\frac{1}{k}$, sendo, portanto, como pretendíamos demonstrar:

$$\lim_{k=\infty} I = \lim_{k=\infty} I' = 0.$$

2.º *O mesmo teorema subsiste, quando* $\varphi(x)$ *apresenta um número finito ou infinito de descontinuïdades, desde que seja absolutamente integrável.*

Com efeito, representemos por E e E', respectivamente, conjuntos formados pela soma dos intervalos, compreendidos em (a, b), onde $\varphi(x)$ seja contínua e apresente descontinuïdades.

Como $\varphi(x)$ é absolutamente integrável e, portanto, integrável, podemos escrever:

$$\int_a^b \varphi(x)\, sen\, kx\, dx = \int_{(E)} \varphi(x)\, sen\, kx\, dx + \int_{(E')} \varphi(x)\, sen\, kx\, dx,$$

sendo E' um conjunto de medida nula (1).

Ora, qualquer que seja o número positivo ε, teremos:

$$\int_{(E')} |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

e, portanto

$$\left| \int_{(E')} \varphi(x)\, sen\, kx\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

representando k um número arbitrário.

Por outro lado, como $\varphi(x)$ é contínua em E, para k superior a um número fixo k_1, convenientemente determinado, vem:

$$\left| \int_{(E)} \varphi(x)\, sen\, kx\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

O teorema está demonstrado, porque para $k > k_1$ é:

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, sen\, kx\, dx \right| < \varepsilon.$$

Observação. — O teorema tem aplicação, em particular, quando se trate duma função de *variação limitada*.

As funções de variação limitada podem apresentar uma infinidade de pontos de descontinuïdade de primeira espécie, consti-

(1) Chamamos *conjunto de medida nula* um conjunto cujos pontos podem encerrar-se num número finito ou numa infinidade numerável de intervalos, de comprimento total tão pequeno quanto se queira.

tuindo um conjunto de medida nula e são absolutamente integráveis (1).

3.º *Se suposermos variáveis os limites* (a, b), *num domínio em que* $\varphi(x)$ *seja absolutamente integrável, a convergência para zero dos integrais* (9) *é uniforme.*

Com efeito, como $\int_a^b |\varphi(x)|\,dx$ é uma função contínua de a e b, e os integrais (9), dependentes do parâmetro k, variam menos ràpidamente com os limites, são estes funções uniformemente contínuas das mesmas variáveis.

Como para cada sistema de valores (a, b) convergem para zero, a todo o número positivo δ podemos fazer corresponder um número k_1, independente de (a, b), tal que seja para $k > k_1$

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, sen\, kx\, dx \right| < \delta,$$

ficando o teorema demonstrado.

Mais geralmente, convergem ainda uniformemente para zero, com $\frac{1}{k}$ *os integrais*

$$\int_a^b \varphi(x_0 + x)\, sen\, kx\, dx \quad \text{e} \quad \int_a^b \varphi(x_0 + x)\, cos\, kx\, dx,$$

desde que a variável $t = x_0 + x$ *não ultrapasse o domínio em que a função seja absolutamente integrável.*

Na verdade, o primeiro integral, por exemplo, é igual à soma dos dois integrais seguintes, que convergem uniformemente para zero:

$$cos\, kx_0 \int_{a+x_0}^{b+x_0} \varphi(t)\, sen\, kt\, dt - sen\, kx_0 \int_{a+x_0}^{b+x_0} \varphi(t)\, cos\, kt\, dt.$$

---

(1) Ver, por exemplo, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Henri Lebesgue, pág. 49 da 2.ª ed.

4.º *Continuando a supor* (a, b) *variáveis, mas de modo que* $t = x_0 + x$ *não exceda o domínio em que* φ *seja absolutamente integrável, os integrais*

$$I_1 = \int_a^b \varphi(x_0 + x)\,\psi(x)\,sen\,kx\,dx \quad \text{e} \quad I_1' = \int_a^b \varphi(x_0 + x)\,\psi(x)\,cos\,kx\,dx$$

convergem uniformemente para zero com $\frac{1}{k}$, *se* $\psi(x)$ *(dependente ou não do parâmetro k) fôr uma função que admite uma derivada contínua.*

Com efeito, integrando por partes o primeiro integral, vem:

$$I_1 = \Phi(b)\,\psi(b) - \int_a^b \Phi(x)\,\psi'(x)\,dx\,,$$

pondo

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(x_0 + x)\,sen\,kx\,dx\,.$$

Como $\Phi(x)$ tende uniformemente para zero com $\frac{1}{k}$, o mesmo acontece a I_1, como desejávamos demonstrar.

32) Das proposições do número anterior deduzem-se, imediatamente, dois teoremas importantes de Riemann:

a) As constantes de Fourier relativas a uma função $f(x)$, *absolutamente integrável, tendem para zero com* $\frac{1}{k}$.

b) A convergência, num ponto x, da série de Fourier, correspondente a $f(x)$, *absolutamente integrável, apenas depende da forma desta função na vizinhança do ponto.*

Com efeito, deduz-se de (5):

$$\pi S_n = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\,sen\,\frac{1}{2}t}\,sen\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt +$$

$$+\int_{0}^{\varepsilon} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\,sen\,\frac{1}{2}t}\,sen\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\,.$$

Como o primeiro integral tende para zero, quando n cresce indefinidamente, qualquer que seja o número positivo ε, S_n tenderá para um limite, quando tender para um limite o último integral.

O teorema que subsiste, como é evidente, para a *série conjugada*, está demonstrado, porque ε é tão pequeno quanto se quiser.

33) **Critério de Riemann-Dini.** — As expressões de R_n e R'_n, escritas no n.º 30, correspondentes a uma função absolutamente integrável, de período 2π, podem tomar a forma

$$R_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t}\,sen\,(n+\tfrac{1}{2})\,t\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\,sen\,\frac{1}{2}t}\right]sen\,(n+\tfrac{1}{2})\,t\,dt$$

$$R'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t}\,cos\,(n+\tfrac{1}{2})\,t\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\,sen\,\frac{1}{2}t}\right]cos\,(n+\tfrac{1}{2})\,t\,dt,$$

pondo

$$\varphi(t) = 2f(x) - \left[f(x+t)+f(x-t)\right]$$

$$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)\,.$$

Como a função $\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2\,sen\,\frac{1}{2}t}\right]$ admite uma derivada contínua, o 4.º lema do n.º 31 mostra-nos que os segundos integrais que entram nas expressões de R_n e R'_n são infinitamente pequenos com $\frac{1}{n}$.

Assim, atendendo aos primeiros lemas do mesmo número, podemos enunciar o critério de convergência:

A série de Fourier duma função, absolutamente integrável, converge para $f(x)$, *quando existe o integral*

$$(10) \qquad \int_0^{\varepsilon} \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt,$$

representando por ε *um número positivo.*

A série conjugada converge para $f_1(x)$, *quando existe o integral*

$$(11) \qquad \int_0^{\varepsilon} \frac{|\psi(t)|}{t}\,dt.$$

Estabelecendo condições a que deve satisfazer $f(x)$ para que (10) e (11) sejam convergentes, obteremos classes de funções que conduzem a séries de Fourier convergentes, sendo importante notar que a existência de (10) pode ter lugar quando $\varphi(t)$ tenda para zero com t, isto é, num ponto regular de $f(x)$, e a existência de (11) quando fôr $f(x+0)=f(x-0)$.

Nesta ordem de ideias, teremos:

O critério de Riemann-Dini é satisfeito se $f(x)$ *fôr Lipchitziana de ordem* $\alpha>0$, *no ponto* x, *isto é, se fôr*

$$|f(x+t)-f(x)|<K|t|^{\alpha},$$

representando K *uma constante positiva.*

Particularmente, a série de Fourier e a série conjugada convergem, se $f(x)$ *admitir derivada.*

34) **Critério de Jordan.** — *A série de Fourier duma função, absolutamente integrável, converge para* $f(x)$ *em qualquer ponto regu-*

lar do domínio em que a função seja de variação limitada. A convergência é uniforme no domínio interior àquele em que a função de variação limitada seja contínua.

Com efeito, como $f(x)$ é de variação limitada na vizinhança do ponto x, também o é $\varphi(t)$ no intervalo $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ e esta função tende para zero com t, porque consideramos um ponto regular.

$\varphi(t)$ será, pois, a diferença de duas funções positivas, não decrescentes, que podem ser escolhidas de modo que sejam nulas para $t=0$.

Assim, pondo

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

para demonstrar que, mediante as condições impostas, R_n tende para zero com $\frac{1}{n}$, basta considerar o primeiro integral da expressão escrita no número precedente, substituindo o limite superior por ε e $\varphi(t)$ por qualquer das funções do segundo membro da igualdade.

Teremos, aplicando o segundo teorema da média e representando por ε_1 um número compreendido entre 0 e ε:

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi_1(t)\,\frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{t}\,dt=\varphi_1(\varepsilon)\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon}\frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{t}\,dt=$$

$$=\varphi_1(\varepsilon)\int_{(n+\frac{1}{2})\,\varepsilon_1}^{(n+\frac{1}{2})\,\varepsilon}\frac{sen\,t}{t}\,dt\,.$$

Ora, por maior que seja n, é:

$$\int_{(n+\frac{1}{2})\,\varepsilon_1}^{(n+\frac{1}{2})\,\varepsilon}\frac{sen\,t}{t}\,dt<\int_0^{\pi}\frac{sen\,t}{t}\,dt\,,$$

independentemente dos valores de ε e ε_1, porque o primeiro integral é a diferença de dois integrais análogos, ambos positivos

e inferiores ao do segundo membro da desigualdade, como se reconhece escrevendo um dêles sob a forma

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\varepsilon} \frac{sen\, t}{t}\, dt = \left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \cdots + \int_{m\pi}^{(n+\frac{1}{2})\varepsilon} \right) \frac{sen\, t}{t}\, dt ,$$

e notando que as parcelas em que se decompõe são decrescentes em valor absoluto e alternadamente positivas e negativas.

Resulta, portanto, que é:

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \varphi_1(t)\, \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{t}\, dt \right| < \pi\, \varphi_1(\varepsilon) .$$

Como φ_1 tende para zero com ε, a todo o número positivo δ podemos fazer corresponder um número η, tal que seja

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi_1(t)\, \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{t}\, dt \right| < \delta ,$$

quando fôr $\varepsilon < \eta$, ficando estabelecida a convergência da série de Fourier, em qualquer ponto regular.

Se $f(x)$ *fôr contínua* o mesmo tem lugar para $\varphi(t)$, que será a diferença de duas funções contínuas, não decrescentes, que tendem *uniformemente* para zero, com t.

No domínio interior ao intervalo de continuïdade, η não depende de x e a *convergência da série é, portanto, uniforme.*

Vê-se também, que a série conjugada converge uniformemente, quando a função $f(x)$ fôr de variação limitada e contínua.

Observação. — O critério de Jordan exige que a função seja de variação limitada, e nós concluimos a convergência da série para $f(x)$, em qualquer ponto regular.

Porém, uma função de variação limitada pode apresentar *descontinuïdades de primeira espécie, não regulares.*

Para estes pontos a série ainda converge, mas a sua soma não é igual ao valor da função, mas sim igual a

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

35) **Fenómeno de Du Bois-Reymond e Gibbs.** — Notemos que para uma função de variação limitada, a convergência uniforme da sua série de Fourier só ficou estabelecida para um domínio interior ao intervalo de continuïdade.

O estudo da série de Fourier duma função de variação limitada, na vizinhança dum ponto de descontinuïdade dá origem ao chamado *fenómeno de Du Bois-Reymond e Gibbs*, que vamos pôr em evidência com um exemplo.

O exemplo de Gibbs corresponde à função de variação limitada, de período 2π, que no intervalo $(0, 2\pi)$ toma os mesmos valores que a função $\frac{\pi - x}{2}$.

O valor zero corresponde a um ponto de descontinuïdade de primeira espécie, para esta função, pois que temos:

$$f(0+0)=\frac{\pi}{2}=f(0) \quad \text{e} \quad f(0-0)=-\frac{\pi}{2}.$$

A série de Fourier, correspondente à função proposta,

$$(12) \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{1}+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+\cdots+\frac{\operatorname{sen} nx}{n}+\cdots,$$

converge uniformemente para o valor da função, no intervalo $(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$, sendo ε positivo e menor que 2π, e para $x=0$ ainda a série é convergente tendo uma soma nula.

Vamos mostrar que a convergência na vizinhança do ponto zero não é uniforme.

Temos para qualquer valor de x do intervalo $(0, \pi)$

$$S_n(x)=\int_0^x \left[\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt\right] dt=$$

$$=\int_0^x \left[-\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right] dt=-\frac{x}{2}+\int_0^x \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\, dt,$$

e, com as mesmas notações do n.º 30

$$R_n(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{sen\,(n+\frac{1}{2})\,t}{t}\,dt +$$

$$+ \int_0^x \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\right] sen\,(n+\tfrac{1}{2})\,t\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{(n+\frac{1}{2})\,x} \frac{sen\,t}{t}\,dt + \int_0^x \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\right] sen\,(n+\tfrac{1}{2})\,t\,dt\,.$$

O último integral escrito tende uniformemente para zero com $\frac{1}{n}$, porque $\frac{1}{t} - \frac{1}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}$ é uma função contínua. Representemos por η êste integral, e fixemos um valor de n.

Os valores de x que correspondem a máximos ou mínimos de $R_n(x)$ no intervalo $(0, \pi)$ são:

$$x_i = \frac{2\,i\,\pi}{2\,n+1}\,,$$

sendo i um inteiro menor ou igual a n. Os valores ímpares de i dão os mínimos e os valores pares os máximos.

Para estes pontos é:

$$R_n(x_i) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{i\pi} \frac{sen\,t}{t}\,dt + \eta\,.$$

Façamos, por exemplo, $i = 1$ e dêem-se valores crescentes a n. Os valores sucessivos de $x = \frac{2\,\pi}{2\,n+1}$ aproximam-se de 0, e R_n não tende para zero com $\frac{1}{n}$, mas para o valor finito e diferente de zero

$$\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi} \frac{sen\,t}{t}\,dt\,.$$

A convergência da série (12) *não é, portanto, uniforme, na vizinhança do valor* 0.

O mesmo se podia verificar, para os pontos $x = 2k\pi$ $[k = 0, 1, 2 \ldots]$.

Considerando a curva, que tem por equação $y = S_n(x)$, vê-se que ela oscila para um lado e outro da recta $y = \frac{\pi - x}{2}$, no intervalo $(0, 2\pi)$. Estas oscilações amortecem-se uniformemente, no intervalo $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, quando n cresce indefinidamente. Porém, nos pontos $\frac{2i\pi}{2n+1}$ ficam superiores a um limite fixo, indo acumular-se nos pontos de descontinuïdade, quando n cresce indefinidamente.

É êste modo de convergência de $S_n(x)$ para $f(x)$, e o facto de existir uma diferença finita entre $S_n(x)$ e o valor da função na vizinhança dos pontos de descontinuïdade, que constitui o fenómeno de Du Bois-Reymond e Gibbs.

III — Singularidades de séries de Fourier de funções contínuas

36) Segundo o critério de Jordan as funções contínuas, de variação limitada, dão origem a séries de Fourier uniformemente convergentes. Mas, há funções contínuas, que num certo intervalo admitem um número infinito de máximos e mínimos e, podem ser por isso de variação não limitada.

É a funções dêste género que devemos dirigir-nos para pôr em evidência as singularidades de Du Bois-Reymond e Lebesgue, referidas no n.º 28.

La Vallée Poussin dá uma forma de construir funções desta natureza e é o seu método que vamos seguir.

Considerando a soma de ordem n da série (12) e representando-a por $\varphi(n, x)$, teremos:

$$2\varphi(n, x)\,\mathrm{sen}\,mx = 2\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1} + \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \ldots + \frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\right)\mathrm{sen}\,mx\,,$$

onde supomos o inteiro $m > n$.

Temos uma função de x, par, contínua, de período 2π, que conserva um valor inferior a um número fixo A, quando n e m crescem indefinidamente.

A série de Fourier desta função é uma série de co-senos, limitada, que fàcilmente se obtém.

Com efeito, é:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{n} \frac{sen\ rt\ sen\ mt}{r} \cos kt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m-r)t - \cos(m+r)t}{r} \cos kt\, dt,$$

ou

$$a_k = 0 \quad \text{para} \quad \begin{matrix} k < m-n \\ k > m+n \end{matrix}$$

$$a_{m-n} = \frac{1}{n},\ a_{m-n+1} = \frac{1}{n-1},\ \cdots\ a_{m-1} = \frac{1}{1},\ a_m = 0,$$

$$a_{m+1} = -\frac{1}{1},\ a_{m+2} = -\frac{1}{2},\ \cdots\ a_{m+n} = -\frac{1}{n}.$$

A série de Fourier é, pois:

$$(13) \qquad \sum_{r=n}^{1} \frac{\cos(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos(m+r)x}{r}.$$

A série conjugada

$$(14) \qquad -\sum_{r=n}^{1} \frac{sen\,(m-r)x}{r} + \sum_{r=1}^{n} \frac{sen\,(m+r)x}{r}$$

é a série de Fourier da função ímpar $2\varphi(n, x)\cos mx$, que goza das mesmas propriedades referidas para $2\varphi(n, x)\,sen\,mx$.

Estas duas funções vão entrar na formação das funções contínuas, cujas séries de Fourier apresentam as singularidades apontadas.

Notemos que sendo $\lim_{n=\infty} \varphi(n,x)\, sen\, mx = \frac{\pi - x}{2} sen\, mx$, para $x \neq 2k\pi$, a função de período 2π que no intervalo $(0, 2\pi)$ toma os mesmos valores que $\frac{\pi - x}{2} sen\, mx$, quando m seja finito, é contínua e de variação limitada, quer dizer, pelo facto de multiplicarmos $\frac{\pi - x}{2}$ por $sen\, mx$, desapareceram as descontinuïdades notadas no último número. Mas, a função considerada, quando m cresce além de todo o limite, apresenta um número infinito de máximos e mínimos e, então, pode deixar de ter uma variação limitada.

A função de período 2π, que no intervalo $(0, 2\pi)$ toma os mesmos valores que $\frac{\pi - x}{2} cos\, mx$, contínua a apresentar descontinuïdades, e pode deixar de ser de variação limitada, quando m cresce indefinidamente.

Façamos o estudo das singularidades, que correspondem nas séries (13) e (14) aos factos apontados:

1.º *O valor absoluto da soma dum grupo qualquer de têrmos consecutivos (soma parcial da série) de* (13) *e* (14) *conserva-se inferior a um número L, que sòmente depende de* ε, *desde que x pertença ao intervalo* $[2k\pi + \varepsilon,\ 2k\pi + (2\pi - \varepsilon)]$, *onde representamos por* ε *um número positivo e por k qualquer dos números* 0, 1, 2....

Com efeito, qualquer soma parcial das séries, que tratamos, pode representar-se por combinações lineares de

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{cos\,(m+r)\,x}{r} \quad \text{e} \quad \sum_{r=1}^{s} \frac{sen\,(m+r)\,x}{r},$$

desde que convencionemos supor que m e x podem ser positivos ou negativos.

Ora, como o valor absoluto de qualquer destas expressões não pode exceder

$$\left| \sum_{r=1}^{s} \frac{\cos(m+r)x + i\,sen(m+r)x}{r} \right| = \left| \sum_{r=1}^{s} \frac{e^{i(m+r)x}}{r} \right| <$$

$$< \left| \frac{e^{ix}(e^{isx}-1)}{e^{ix}-1} \right| = \left| \frac{e^{i\frac{x}{2}}(e^{isx}-1)}{2\,i\,sen\frac{x}{2}} \right|,$$

ou

$$\left| \sum_{r=1}^{s} \frac{\cos(m+r)x + i\,sen(m+r)x}{r} \right| < \left| \frac{1}{sen\frac{x}{2}} \right| < \left| \frac{1}{sen\frac{\varepsilon}{2}} \right| = L,$$

fica demonstrada a proposição.

2.º *Na série* (13) *existe uma soma parcial, que cresce indefinidamente com n, para* $x = 2k\pi$.

Na verdade, pondo $x = 2k\pi$ no segundo somatório que aparece em (13), vem:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} = \int_1^2 dr + \int_2^3 \frac{1}{2}\,dr + \ldots + \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dr > \int_1^{n+1} \frac{dr}{r} > \log n.$$

3.º *Na série* (14) *existe uma soma parcial que não tende uniformemente para zero, quando x tende para* $2k\pi$.

Com efeito, ponhamos $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2m}$, no primeiro somatório, supondo m infinitamente grande.

Por ser $\frac{r}{m}\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{m}\frac{\pi}{2}\right)}{r} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos\frac{r}{m}\frac{\pi}{2}}{r} > \sum_{r=1}^{n} \frac{1 - \frac{r}{m}\frac{\pi}{2}}{r} > \log n - \frac{\pi}{2}.$$

37) Feitas estas considerações, vamos construir funções contínuas, a que correspondem séries de Fourier, que divergem, ou que não convergem uniformemente.

Seja $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ uma série convergente, de têrmos positivos.

Sejam $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$; $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ duas sucessões infinitas de números inteiros e positivos, que crescem com o índice, sendo $c_n > b_n$.

As séries de têrmos contínuos

$$(15) \qquad f(x) = \sum_1^\infty a_n \varphi(b_n, x) \operatorname{sen}(c_n x)$$

$$(16) \qquad f_1(x) = \sum_1^\infty a_n \varphi(b_n, x) \cos(c_n x)$$

são uniformemente convergentes, porque os valores absolutos dos seus têrmos são menores que os da série convergente de têrmos constantes e positivos $A\sum_1^\infty a_n$.

As suas somas $f(x)$ e $f_1(x)$ são, portanto, *funções contínuas.*

Suponhamos que fazemos crescer indefinidamente b_n, de modo que $a_n \log b_n$ cresça também indefinidamente com n.

c_n cresce do mesmo modo além de todo o limite, e nós podemos ainda fazê-lo crescer tão ràpidamente que seja

$$c_n - b_n > c_{n-1} + b_{n-1}.$$

As séries de Fourier de f e f_1 obtêm-se escrevendo sucessivamente os desenvolvimentos de Fourier dos diferentes têrmos de (15) e (16).

A condição necessária e suficiente para a convergência

$$| S_{n+p} - S_n | < \delta , \quad \text{para} \quad n > N ,$$

qualquer que seja p, não pode realizar-se, para $x = 2k\pi$, na série de Fourier de $f(x)$, porque esta tem somas parciais com as mesmas propriedades das de (13).

A série de Fourier de $f_1(x)$ é, evidentemente, convergente para $x = 2k\pi$, porque tem uma soma, que é zero. Porém, na vizinhança daquele ponto a convergência não pode ser uniforme, porque a série tem somas parciais como as de (14).

Assim, as séries de Fourier das funções $f(x)$ e $f_1(x)$, que são séries conjugadas, apresentam, respectivamente, as singularidades de Du Bois-Reymond e Lebesgue.

Fàcilmente se vê, que estas séries são uniformemente convergentes no intervalo $[2k\pi + \varepsilon, \; 2k\pi + (2\pi - \varepsilon)]$.

Com efeito, as somas dos m primeiros têrmos destas séries, qualquer que seja m, são iguais às somas dum certo número de têrmos de (15) ou (16), que tendem uniformemente para um limite, quando m cresce indefinidamente, e de somas parciais de (13) ou (14) multiplicadas por constantes, que convergem uniformemente para zero.

Exemplo. — Às funções contínuas

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi \left(2^{n^3} x \right) sen \left(2^{(n+1)^3} x \right)$$

$$f_1(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi \left(2^{n^3} x \right) cos \left(2^{(n+1)^3} x \right)$$

correspondem séries de Fourier com as singularidades de Du Bois-Reymond e Lebesgue, porque $\frac{1}{n^2} \log 2^{n^3}$ cresce indefinidamente com n, e $2^{(n+1)^3} - 2^{n^3} > 2^{n^3} + 2^{(n-1)^3}$.

IV — SOMAS DE FEJÉR

38) Do que foi exposto conclui-se que o emprêgo de séries de Fourier exige o maior cuidado, e que o estudo das condições de convergência é delicado.

Não é possível, com generalidade, definir uma função contínua pela sua série de Fourier, se nos limitamos a considerar séries convergentes.

Se uma função, absolutamente integrável, apresentar descontinuïdades de primeira espécie, a sua série de Fourier pode convergir nestes pontos e a convergência pode ser uniforme num certo intervalo, que não contenha as descontinuïdades.

O fenómeno de Du Bois-Reymond e Gibbs mostra, porém, que a soma dos $n+1$ primeiros têrmos pode não estar compreendida entre o mínimo e o máximo da função, e que nos pontos de descontinuïdade $\lim. S_n$ se afasta do valor da função.

Vamos ver que o primeiro capítulo dêste trabalho tem nas séries de Fourier um belo campo de aplicação, porque a teoria nêle exposta permite-nos empregar séries de Fourier, com uma generalidade muito superior àquela que se obtinha, considerando sòmente séries convergentes.

É a isso que nos conduz o teorema seguinte:

A série de Fourier duma função absolutamente integrável, de período 2π, *é somável* $(C, 1)$, *em todo o ponto em que* $f(x)$ *admite um valor limite à direita e um valor limite à esquerda. A sua soma generalizada é* $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Representemos por σ_n a soma de ordem n de Fejér, que corresponde segundo as notações do n.º 6 a C^1_{n-1}:

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t) \right] \sum_{k=0}^{n-1} \frac{sen\,(k+\frac{1}{2})\,t}{2\,sen\,\frac{1}{2}\,t}\, dt\,.$$

Como é:

$$sen\,\frac{1}{2}t\sum_{k=0}^{n-1} sen\,(k+\tfrac{1}{2})\,t=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{cos\,kt-cos\,(k+1)\,t}{2}=\frac{1-cos\,nt}{2}=sen^2\,\frac{n}{2}\,t\,,$$

vem, fazendo a substituïção e mudando t em $2t$, o *integral de Fejér:*

$$(17)\qquad \sigma_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\left(\frac{sen\,nt}{sen\,t}\right)^2 dt.$$

Pretendemos demonstrar que é

$$\lim_{n=\infty}\sigma_n=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Pondo $f(x)=1$, qualquer soma de Fejér é igual à unidade, resultando:

$$(18)\qquad 1=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{sen\,nt}{sen\,t}\right)^2 dt.$$

Multipliquemos ambos os membros por $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ e subtraiamos, membro a membro, (17) e a igualdade resultante. Vem:

$$\sigma_n-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\left(\frac{sen\,nt}{sen\,t}\right)^2 dt\,,$$

representando por $\psi(t)$ a diferença

$$\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,,$$

ou, designando por I o último integral e por ε um número positivo arbitrário,

$$I=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\,sen^2\,nt\left[\frac{1}{sen^2\,t}-\frac{1}{t^2}\right]dt+\frac{2}{n\pi}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\psi(t)\left(\frac{sen\,nt}{t}\right)^2 dt+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\varepsilon}\psi(t)\left(\frac{sen\,nt}{t}\right)^2 dt\,.$$

Como as duas primeiras parcelas tendem para zero com $\frac{1}{n}$, porque os integrais têm sempre um valor finito, é

$$\lim_{n=\infty} I = \lim_{n=\infty} \left[\frac{2}{n\pi} \int_0^{\varepsilon} \psi(t) \left(\frac{\operatorname{sen} nt}{t} \right)^2 dt \right].$$

Ora, como em virtude das hipóteses do teorema é $|\psi(t)| < \delta$ (número positivo arbitrário), quando t fôr escolhido suficientemente próximo de zero, podemos fixar ε de modo que seja respeitada esta condição no intervalo $(0, \varepsilon)$, vindo para valores de n suficientemente grandes

$$|I| < \frac{2\delta}{n\pi} \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} nt}{t} \right)^2 dt = \frac{2\delta}{\pi} \int_0^{n\varepsilon} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^2 dt,$$

e

$$\lim_{n=\infty} |I| < \frac{2\delta}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^2 dt < \delta,$$

atendendo a que é

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

σ_n tende para o limite que foi referido e está, portanto, demonstrado o teorema.

Corolários. — 1.º *Em qualquer ponto regular da função é* $\lim. \sigma_n = f(x)$.

2.º *Em todo o intervalo interior ao intervalo de continuïdade* σ_n *converge uniformemente para* $f(x)$.

Podemos, pois, sempre definir uma função contínua pela sua série de Fourier, desde que se considere a soma generalizada $\lim. \sigma_n$.

39) **Teorema de Weierstrass.** — É interessante notar, que obter as somas de Fejér equivale a substituir a série de Fourier pela série

$$\sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n - \sigma_{n-1}),$$

cujos têrmos são expressões trigonométricas finitas da forma

$$a_0 + a_1 \cos x + \beta_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + \beta_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots +$$

$$+ a_{n-1} \cos (n-1)x + \beta_{n-1} \operatorname{sen} (n-1)x,$$

que é uniformemente convergente, se a função correspondente fôr contínua.

Daqui se deduz como aplicação interessante um teorema notável de Weierstrass:

Uma função contínua de período 2π *pode desenvolver-se em série uniformemente convergente de expressões trigonométricas finitas.*

Uma função contínua num intervalo (a, b) *pode desenvolver-se em série uniformemente convergente de polinómios.*

A primeira parte é uma conseqüência imediata do que ficou dito.

Para demonstrar a segunda parte, observemos, em primeiro lugar, que obter o desenvolvimento duma função em série uniformemente convergente de expressões trigonométricas ou polinómios, e determinar expressões trigonométricas finitas ou polinómios, que representem a função com uma aproximação tão grande quanto se queira, independentemente dos valores da variável, são questões equivalentes.

Com efeito, seja:

$$f(x) = \sum P_i(x)$$

uma série uniformemente convergente.

É possível fazer corresponder a todo o número positivo δ um número N, independente de x, tal que, para $n > N$, tenhamos

$$|f(x) - S_n(x)| < \delta .$$

S_n, soma de n expressões finitas, é uma expressão finita, cujo *desvio* a $f(x)$ é tão pequeno quanto se queira.

Reciprocamente, suponhamos que por meio de expressões trigonométricas finitas ou polinómios realizamos a aproximação da função, tão grande quanto se queira, independentemente de x.

A uma sucessão infinita de números positivos, tendendo para zero

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \ldots$$

é possível fazer corresponder uma sucessão infinita de expressões $P_0, P_1 \ldots P_n \ldots$, cujos desvios com relação a $f(x)$ são inferiores a ε_i $[i = 0, 1 \ldots n \ldots]$.

Então, a série

$$f(x) = P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots ,$$

cujos termos são expressões trigonométricas finitas ou polinómios, é uniformemente convergente.

Seja então $f(x)$ uma função contínua em (a, b).

O intervalo arbitrário (a, b) pode reduzir-se ao intervalo $(-1, +1)$, empregando a substituïção linear

$$x = a\frac{1-t}{2} + b\frac{1+t}{2} .$$

Assim, sem que seja modificada a generalidade, podemos supor $f(x)$ definida no intervalo $(-1, +1)$ e, pôr $x = \cos\varphi$.

A função $f(\cos\varphi)$ é uma função par, de período 2π, contínua, cujo desenvolvimento de Fourier dá origem à soma de Fejér σ_n, de desvio a $f(\cos\varphi)$ tão pequeno quanto se queira.

Os têrmos da série contêm sòmente co-senos e assim é:

$$\sigma_n = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots + a_{n-1} \cos(n-1)\varphi .$$

Como $\cos k\varphi$ é um polinómio do grau k em $\cos\varphi$, que podemos representar por $P_k(\cos\varphi) = P_k(x)$, temos também que σ_n se pode substituir pelo polinómio

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_{n-1} P_{n-1}(x),$$

ficando, portanto, demonstrado o teorema, em conseqüência da observação feita.

40) Já pusemos em evidência a utilidade das somas de Fejér, quando se pretende obter a aproximação duma função contínua, por meio de expressões trigonométricas finitas.

Debaixo do mesmo ponto de vista é ainda notável o teorema seguinte:

Se $f(x)$ fôr limitada e integrável, tendo por extremos superior e inferior l e L, a soma de Fejér, σ_n, ficará sempre compreendida entre l e L.

Temos, com efeito:

$$\frac{2l}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt \leq \sigma_n \leq \frac{2L}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt .$$

Vem, pois, como pretendíamos demonstrar, atendendo a (18):

$$l \leq \sigma_n \leq L .$$

Como vimos, (fenómeno de Du Bois-Reymond e Gibbs) as somas de Fourier, S_n, não gozam, duma maneira geral, da mesma propriedade.

Com relação a estas, apenas podemos afirmar, continuando a tratar de funções limitadas e integráveis:

Se os módulos dos produtos das constantes de Fourier pelos seus índices se conservarem sempre inferiores a dois números fixos A e B, S_{n-1} estará compreendida entre $l-(A+B)$ e $L+(A+B)$.

Com efeito, pondo na série de Fourier correspondente à função $u_k = a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$, temos:

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n} = S_{n-1} - \frac{1}{n}\left(u_1 + 2u_2 + \ldots + (n-1)u_{n-1}\right).$$

Como é, em virtude da hipotese, $k|u_k| < A+B$, resulta:

$$|\sigma_n - S_{n-1}| < A+B,$$

ou

$$-(A+B) < \sigma_n - S_{n-1} < A+B,$$

ou ainda, como pretendíamos demonstrar

$$l-(A+B) < S_{n-1} < L+(A+B).$$

Êste teorema aplicado, por exemplo, à função considerada no n.º 35 mostra que S_{n-1} está compreendida entre os limites

$$-\left(\frac{\pi}{2}+1\right) \quad \text{e} \quad +\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

V — FUNÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES DE FOURIER

41) Sabemos que, sendo dada uma função absolutamente integrável, é fácil obter o seu desenvolvimento de Fourier e, com bastante generalidade, do exame da função concluimos a natureza da série.

Apresenta-se-nos, porém, ainda um problema interessante, que vamos expor:

Seja dada uma série trigonométrica, convergente,

$$(19) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \,,$$

em que a_k e b_k representam constantes. Esta série define uma função limitada de período 2π, que pode ser integrável.

Suponhamos que se trata duma função limitada e integrável, no sentido de Riemann.

A série trigonométrica será o seu desenvolvimento de Fourier e sendo assim, não poderá êste corresponder a outra função?

Ou, por outras palavras:

Existirá uma correspondência bi-unívoca entre uma série trigonométrica da forma (19), *convergente, e uma certa função limitada e integrável?*

42) Se a série fôr uniformemente convergente, a sua soma é uma função contínua, e como a série pode ser integrada têrmo a têrmo depois de a multiplicarmos por seno ou co-seno dum múltiplo de x, fàcilmente concluimos que é a série de Fourier da função.

Temos mais:

Duas funções contínuas de período 2π, que conduzam ao mesmo desenvolvimento de Fourier, são idênticas.

Com efeito, sejam $f(x)$ e $\varphi(x)$ duas funções, que obedecem às condições do enunciado, e representemos por S_n a soma dos $n+1$ primeiros têrmos da série.

Temos:

$$\int_0^{2\pi} \left[f - S_n\right]^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2\, dx - 2\int_0^{2\pi} f S_n\, dx + \int_0^{2\pi} S_n^2\, dx\,,$$

$$\int_0^{2\pi} f S_n\, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \int_0^{2\pi} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right) f\, dx =$$

$$= \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

e

$$\int_0^{2\pi} S_n^2\, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \int_0^{2\pi} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)^2 dx =$$

$$= \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right].$$

Resulta pois:

$$\int_0^{2\pi} \left[f - S_n\right]^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2\, dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right],$$

e fazendo crescer n indefinidamente

$$\int_0^{2\pi} f^2\, dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)\right], \tag{20}$$

por estarmos a considerar um desenvolvimento uniformemente convergente.

Ora, como à função $f - \varphi$ corresponde um desenvolvimento de Fourier de constantes tôdas nulas, vem:

$$\int_0^{2\pi} (f - \varphi)^2\, dx = 0\,,$$

donde se conclue que é $f \equiv \varphi$, como pretendíamos demonstrar.

43) A igualdade (20), estabelecida na demonstração do último teorema, não exige a continuïdade da função, nem a convergência da série.

Exprime uma condição necessária para que o desenvolvimento trigonométrico (19), *somável* (*C*, 1), *que define uma função limitada e integrável* $f(x)$, *seja o seu desenvolvimento de Fourier.*

Na verdade, se $f(x)$ fôr limitada e integrável, o mesmo se dá com $f^2(x)$. Temos então, representando por S_n a soma dos primeiros $n+1$ têrmos de (19), que supomos um desenvolvimento de Fourier:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left[f(x) - S_n \right]^2 dx = \int_0^{2\pi} f^2\, dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right].$$

Como I_n é positivo, vem qualquer que seja n:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n \left(a_k^2 + b_k^2 \right) < \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2\, dx$$

e

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2\, dx .$$

Vamos mostrar que só podemos conservar o sinal de igualdade.

Com efeito, por ser $f(x)$ uma função limitada e integravel, os seus pontos de descontinuïdade formam um conjunto de medida nula. $f(x)$ é, pois, contínua no domínio $(0, 2\pi)$, excluindo intervalos de medida total α, arbitràriamente pequena, e a soma de ordem n de Fejér, correspondente a (19) converge uniformemente para $f(x)$, fora dêstes intervalos.

Ponhamos:

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2\, dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right].$$

ε é necessàriamente positivo ou nulo, e vamos ver que supor $\varepsilon \neq 0$ nos conduz a um absurdo.

É possível fazer corresponder ao mesmo número ε um número N, tal que seja

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x)-\sigma_n\right]^2 dx < \varepsilon\,,$$

quando fôr $n > N$, porque a parte dêste integral, que corresponde aos intervalos de continuïdade é arbitràriamente pequena e isso mesmo se realiza nos intervalos de descontinuïdade.

Na verdade, como σ_n está sempre compreendida entre o máximo e mínimo valor da função limitada, representando por L o limite superior em valor absoluto, a parte do integral correspondente às descontinuïdades não excede $\frac{1}{\pi} 4L^2\alpha$.

Ora, σ_n é uma expressão trigonométrica finita, que podemos escrever com a forma:

$$\frac{a_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \operatorname{sen} x + \ldots + \alpha_{n-1}\cos(n-1)x + \beta_{n-1}\operatorname{sen}(n-1)x\,,$$

vindo

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2\,dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right) - \left[a_0\alpha_0 + 2\sum_1^n\left(a_k\alpha_k + b_k\beta_k\right)\right].$$

Resulta, pois, substituindo ε pelo valor que lhe foi dado anteriormente:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^\infty\left(a_k^2+b_k^2\right)+\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^n\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)-\left[a_0\alpha_0+2\sum_1^n\left(a_k\alpha_k+b_k\beta_k\right)\right]<0$$

ou

$$\sum_{n+1}^\infty\left(a_k^2+b_k^2\right)+\frac{\left(a_0-\alpha_0\right)^2}{2}+\sum_1^n\left[\left(a_k-\alpha_k\right)^2+\left(b_k-\beta_k\right)^2\right]<0\,.$$

Como esta igualdade constitui, evidentemente, um absurdo, a que fomos conduzidos por supor $\varepsilon > 0$, a igualdade (20) verifica-se, pois, numa série de Fourier correspondente a qualquer função limitada e integrável.

Dêste resultado podemos imediatamente concluir um teorema, mais geral do que o demonstrado no último número:

Duas funções f e φ, limitadas e integráveis, de período 2π, que nos conduzam ao mesmo desenvolvimento de Fourier, só podem deixar de ser idênticas em pontos que constituem um conjunto de medida nula.

44) Para ficarem completamente tratadas as questões postas no n.º 41, resta-nos estabelecer que a série convergente (19), que tem por soma a função $f(x)$ limitada e integrável, é a série de Fourier que corresponde a esta função, desde que se verifique a condição (20).

Conduz-nos a êste resultado um método somatório de séries trigonométricas, devido a Riemann que, como veremos, se pode incluir nos métodos somatórios regulares por factores de convergência.

Suponhamos que as constantes a_k e b_k são limitadas, o que se realiza, particularmente, quando tem lugar a condição (20).

A função de Riemann:

$$F(x) = A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \ldots - \frac{A_n}{n^2} - \ldots,$$

definida pela série que se obtém integrando (19) duas vezes, têrmo a têrmo, e pondo $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$, é contínua, porque é soma duma série uniformemente convergente, de têrmos contínuos.

O método somatório de Riemann consiste em determinar a função $F(x)$, e em atribuir à série trigonométrica uma soma no sentido generalizado igual à derivada segunda generalizada daquela função.

A soma de Riemman é, pois:

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{h^2} = \lim_{\alpha=0} \frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{4\alpha^2},$$

tendo-se

$$\frac{\Delta^2 F(x)}{4\alpha^2} = \frac{1}{4\alpha^2}\left\{A_0\frac{(x+2\alpha)^2}{2} - \sum_1^\infty\left[\frac{a_k}{k^2}\cos k(x+2\alpha)+\frac{b_k}{k^2}\operatorname{sen} k(x+2\alpha)\right]+\right.$$

$$+A_0\frac{(x-2\alpha)^2}{2} - \sum_1^\infty\left[\frac{a_k}{k^2}\cos k(x-2\alpha)+\frac{b_k}{k^2}\operatorname{sen} k(x-2\alpha)\right]-$$

$$\left.-2A_0\frac{x^2}{2}+2\sum_1^\infty\left[\frac{a_k}{k^2}\cos kx+\frac{b_k}{k^2}\operatorname{sen} kx\right]\right\},$$

ou

$$(21)\qquad \frac{\Delta^2 F(x)}{4\alpha^2} = A_0 + A_1\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2 + A_2\left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha}\right)^2 + \ldots +$$

$$+A_n\left(\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n\alpha}\right)^2 + \ldots$$

Assim, atribuir à série (19) a soma generalizada $\lim_{\alpha=0} \frac{\Delta^2 F(x)}{4\alpha^2}$, equivale a somar a série, empregando a sucessão de *factores de convergência* $1, \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha}\right)^2 \ldots$.

Estes factores de convergência, positivos, que pondo $r=\frac{1}{\alpha}$ podemos designar geralmente por $\varphi_i(r)$ $[i=0, 1, 2\ldots]$, satisfazem às condições do teorema de Perron (n.º 2).

Com efeito, é evidente, que temos

$$\lim_{r=\infty} \varphi_i = 1,$$

e vamos também provar que é uniformente limitada a série

$$\sum_{0}^{\infty} \left| \varphi_i - \varphi_{i+1} \right| .$$

Escolhendo um inteiro n, de modo a satisfazer à condição

$$n \mid \alpha \mid < \pi < (n+1) \mid \alpha \mid ,$$

resulta:

$$\sum_{0}^{\infty} \left| \left(\frac{sen\, i\alpha}{i\alpha}\right)^2 - \left(\frac{sen\,(i+1)\,\alpha}{(i+1)\,\alpha}\right)^2 \right| = \sum_{0}^{n-1} \left[\left(\frac{sen\, i\alpha}{i\alpha}\right)^2 - \left(\frac{sen\,(i+1)\,\alpha}{(i+1)\,\alpha}\right)^2 \right] +$$

$$+ \sum_{n}^{\infty} \left| \left(\frac{sen\, i\alpha}{i\alpha}\right)^2 - \left(\frac{sen\,(i+1)\,\alpha}{(i+1)\,\alpha}\right)^2 \right| ,$$

tendo-se suprimido o sinal de módulo na primeira soma do segundo membro, em virtude da função $\frac{sen\, x}{x}$ ser constantemente decrescente, para valores de x inferiores a π.

Mostremos que são limitadas ambas as somas que temos a considerar:

A primeira é limitada porque é igual a

$$1 - \left(\frac{sen\, n\alpha}{n\alpha}\right)^2 < 1 .$$

A segunda que pode escrever-se com a forma

$$\sum_{n}^{\infty} \left| \left[\left(\frac{sen\, i\alpha}{i\alpha}\right)^2 - \left(\frac{sen\,(i+1)\,\alpha}{i\alpha}\right)^2 \right] + \left[\left(\frac{sen\,(i+1)\,\alpha}{i\alpha}\right)^2 - \left(\frac{sen\,(i+1)\,\alpha}{(i+1)\,\alpha}\right)^2 \right] \right| =$$

$$= \sum_{n}^{\infty} \left| - sen\,\alpha\, sen\,(2i+1)\,\alpha \frac{1}{i^2\alpha^2} + \left[sen\,(i+1)\,\alpha \right]^2 \left[\frac{1}{i^2\alpha^2} - \frac{1}{(i+1)^2\alpha^2} \right] \right| ,$$

é inferior a

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{|\alpha|}{t^2\alpha^2} + \frac{1}{n^2\alpha^2} < \int_{(n-1)|\alpha|}^{\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n^2\alpha^2} = \frac{1}{(n-1)|\alpha|} + \frac{1}{n^2\alpha^2},$$

e portanto, independentemente dos valores de α, também limitada, em conseqüência do número n ser escolhido de modo que as últimas fracções escritas têm por limites $\frac{1}{\pi}$ e $\frac{1}{\pi^2}$, quando α tende para zero.

Assim, como foi referido, o método somatório de Riemann *é regular,* podendo imediatamente enunciar-se o teorema:

A função soma duma série trigonométrica convergente, para qualquer valor de x, quando as constantes a_k e b_k são limitadas, é a derivada segunda generalizada duma função contínua, que é definida pela série que resulta de se integrar duas vezes, têrmo a têrmo, a proposta.

As conclusões a tirar, conforme referimos, são traduzidas no teorema:

A condição (20) *é não só uma condição necessária, mas também suficiente para que o desenvolvimento convergente* (19) *seja a série de Fourier da função $f(x)$ limitada e integrável que define.*

Com efeito, atendendo a um teorema de Schwarz, que estabelece que duas funções que admitem a mesma derivada segunda generalizada finita, exceptuando sòmente pontos dum conjunto de medida nula em que as funções são contínuas e satisfazem à condição $\lim_{h=0} \frac{\Delta^2 f}{h} = 0$, não podem diferir senão por uma função linear, resulta:

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(u)\, du + p\,x + q\,.$$

Notando que $\int_a^x f(u)\, du$ é uma função contínua de x, vem:

$$F'(x) = \int_a^x f(x)\, dx + p$$

e

$$\Delta^2 F(x) = \int_0^{2\alpha} \left[F'(x+t) - F'(x-t) \right] dt = \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{+t} f(x+u)\, du\,.$$

Como (21) é uma série uniformemente convergente, quando se fixa um valor de α, porque os valores absolutos dos têrmos de (19) são inferiores a um número finito M e portanto os de (21) inferiores aos da série convergente de têrmos positivos $\frac{M}{\alpha^2}\sum\frac{1}{n^2}$, podemos integrar têrmo a têrmo, depois de multiplicarmos ambos os membros por $\frac{1}{\pi}\cos kx$, vindo:

$$4\left(\frac{\operatorname{sen} k\alpha}{k}\right)^2 a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{+t} du \int_0^{2\pi} f(x+u)\cos kx\,dx .$$

Mudando x em $x-u$, e não esquecendo que a função é periódica, temos ainda:

$$4\left(\frac{\operatorname{sen} k\alpha}{k}\right)^2 a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{+t} du \int_0^{2\pi} f(x)\left(\cos kx\cos ku + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ku\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{+t} \cos ku\,du =$$

$$= 4\left(\frac{\operatorname{sen} k\alpha}{k}\right)^2 \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx .$$

Vem, pois, finalmente:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx ,$$

e do mesmo modo se mostraria que é também

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx .$$

As constantes do desenvolvimento (19) são as constantes de Fourier e, portanto, está demonstrado o teorema.

VI — Operações sôbre as séries de Fourier

45) **Adição.** — Reconhece-se, fàcilmente, que a série de Fourier da função $af_1(x)+bf_2(x)$, em que a e b designam constantes, se obtém somando, têrmo a têrmo, as séries de Fourier de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, depois de multiplicadas por a e b.

A somabilidade da série *soma* deduzir-se há da das *parcelas*, sendo a primeira série somável $(C, 1)$ quando o forem as segundas.

46) **Multiplicação.** — O produto de duas séries de Fourier pode obter-se segundo a regra de Cauchy, e a somabilidade da série produto será regulada pelo teorema do n.º 12.

A convergência das duas séries dadas assegura a somabilidade $(C, 1)$ da série produto, sendo $\lim_{n=\infty} \sigma_n = f_1 \times f_2$.

Devemos, porém, notar que o produto, obtido pela regra de Cauchy, não é uma série de Fourier.

Pode por isso apresentar-se o problema seguinte:

Sendo duas funções $f_1(x)$ *e* $f_2(x)$ *definidas pelas suas séries de Fourier, somáveis* $(C, 1)$

$$f_1(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right)$$

(22)

$$f_2(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx \right)$$

determinar a série de Fourier correspondente ao produto $f_1(x) \times f_2(x)$.

Com o fim de resolver o problema, multipliquemos cada têrmo da primeira série por $f_2(x)$, notando a correspondência

$$f_1 f_2 \sim \frac{1}{2} a_0 f_2(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i f_2(x) \, 2 \cos ix + b_i f_2(x) \, 2 \operatorname{sen} ix \right].$$

Como as constantes de Fourier, relativas às funções $2f_2(x)\cos ix$ e $2f_2(x)\operatorname{sen} ix$, convencionando pôr $\alpha_{-n}=\alpha_n$, $\beta_{-n}=-\beta_n$, são respectivamente:

$$\alpha'_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\,2\cos ix\cos kx\,dx=\alpha_{i+k}+\alpha_{i-k}$$

$$\beta'_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\,2\cos ix\operatorname{sen} kx\,dx=\beta_{i+k}-\beta_{i-k}$$

e

$$\alpha''_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\,2\operatorname{sen} ix\cos kx\,dx=\beta_{i+k}+\beta_{i-k}$$

$$\beta''_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x)\,2\operatorname{sen} ix\operatorname{sen} kx\,dx=\alpha_{i-k}-\alpha_{i+k}\,,$$

substituindo, no segundo membro da correspondência notada, $f_2(x)$ e as últimas funções pelas suas séries de Fourier e somando estas, resulta:

$$f_1 f_2 \sim \frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos kx+B_k\operatorname{sen} kx\right), \tag{23}$$

se pusermos

$$\begin{cases} A_0=\dfrac{1}{2}a_0\alpha_0+\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i\alpha_i+b_i\beta_i\right) \\ A_k=\dfrac{1}{2}a_0\alpha_k+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i\left(\alpha_{i+k}+\alpha_{i-k}\right)+b_i\left(\beta_{i+k}+\beta_{i-k}\right)\right] \\ B_k=\dfrac{1}{2}a_0\beta_k+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[a_i\left(\beta_{i+k}-\beta_{i-k}\right)-b_i\left(\alpha_{i+k}-\alpha_{i-k}\right)\right]. \end{cases} \tag{24}$$

Vamos mostrar que, dentro das nossas hipóteses, o segundo membro de (23) é o desenvolvimento de Fourier da função limitada e integrável $f_1 \times f_2$.

Temos, pois, de verificar que (24) são as constantes de Fourier relativas a esta função.

Esta verificação, porém, pode limitar-se à primeira fórmula, porque as constantes A_k e B_k correspondem a A_0, substituindo $f_1 f_2$ por $f_1 f_2 \cos kx$ ou $f_1 f_2 \operatorname{sen} kx$, que são funções nas mesmas condições de $f_1 f_2$.

Suponhamos, em primeiro lugar, $f_1 = f_2$.

A primeira fórmula (24) definirá a correspondente constante de Fourier quando tivermos:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i^2 + b_i^2\right).$$

Ora, como esta igualdade exprime uma condição necessária para que o primeiro desenvolvimento (22), somável $(C, 1)$, seja a série de Fourier da função que define, temos feita a verificação.

Suponhamos $f_1 \neq f_2$.

Vem, representando por λ uma constante arbitrária:

$$\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1 f_2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f_1 + \lambda f_2\right)^2 dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1^2\,dx - \frac{\lambda^2}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2^2\,dx,$$

e, atendendo ao resultado já obtido, e às hipóteses de que partimos, temos, fazendo as substituïções:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1 f_2\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i\alpha_i + b_i\beta_i\right).$$

Assim, as constantes (24) são, na verdade, as constantes de Fourier, correspondentes à função $f_1(x) \times f_2(x)$, e (23) é a sua série de Fourier.

Esta série será somável $(C, 1)$ em qualquer ponto em que $f_1 \times f_2$, limitada e integrável, admita um valor limite à direita e um valor limite à esquerda.

Se f_1 e f_2 forem contínuas, $f_1 \times f_2$ também é contínua e σ_n converge uniformemente para $f_1 \times f_2$.

Se as duas séries (22) forem absolutamente convergentes, o que em particular se realiza se forem convergentes as séries com têrmos gerais $|a_k|$, $|b_k|$, $|\alpha_k|$, $|\beta_k|$, a série de Fourier produto converge e tem por soma $f_1 \times f_2$.

Pode obter-se essa série, multiplicando têrmo a têrmo as duas séries (22), substituindo os produtos de co-senos e senos por somas algébricas de co-senos e senos, e grupando convenientemente estes têrmos.

47) **Integração.** — *A série de Fourier correspondente a uma função absolutamente integrável $f(x)$, de período 2π, pode sempre integrar-se em qualquer intervalo, têrmo a têrmo, sendo a soma da série que se obtém o integral de $f(x)$. Se os limites do integral forem variáveis, a série que resulta da integração é uniformemente convergente.*

Seja $\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$ a série de Fourier de $f(x)$, convergente ou divergente e ponhamos

$$F(x) = \int_0^x \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx .$$

$F(x)$ é uma função de variação limitada e contínua em todo o intervalo $(0, 2\pi)$, tendo como derivada $f(x) - \frac{a_0}{2}$ em todos os pontos onde esta função seja contínua, isto é, em todo o intervalo com excepção de pontos dum conjunto de medida nula.

Como temos:

$$F(0) = F(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] dx = 0 ,$$

$F(x)$ é susceptível de se desenvolver em série de Fourier, uniformemente convergente, em todo o intervalo $(0, 2\pi)$, vindo:

$$(25) \qquad F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx \right] .$$

Calculemos as constantes:

Em virtude das propriedades de $F(x)$ e $f(x)-\frac{a_0}{2}$, enunciadas, é legítimo escrever, para $k \neq 0$:

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{F(x)\operatorname{sen} kx}{k}\right]_0^{2\pi} - \\ -\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx = -\frac{b_k}{k}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{F(x)\cos kx}{k}\right]_0^{2\pi} + \\ +\frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_k}{k}.$$

Pondo em (25) $x=0$, e atendendo aos resultados já obtidos, temos também:

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k},$$

que é forçosamente uma série convergente.

Portanto, a série (25), uniformemente convergente, pode escrever-se

$$F(x) = \sum_1^{\infty}\frac{b_k}{k} + \sum_1^{\infty}\frac{-b_k\cos kx + a_k\operatorname{sen} kx}{k} = \sum_1^{\infty}\frac{b_k(1-\cos kx)+a_k\operatorname{sen} kx}{k},$$

sendo a última série aquela que se obtém integrando entre 0 e x, têrmo a têrmo, a partir do segundo, a proposta.

A integração pode fazer-se em qualquer intervalo, compreendido em $(0, 2\pi)$ e fora dêste último, por serem periódicas tôdas as funções a integrar.

Está completamente demonstrado o teorema, concluindo-se que uma série de Fourier integrada uma vez conduz a uma série trigonométrica, adicionada, em geral, dum polinómio do primeiro grau.

Integrando a mesma série n vezes, somos conduzidos a uma série trigonométrica adicionada, em geral, dum polinómio do grau n.

48) **Derivação.** — *A série que se obtém derivando, têrmo a têrmo, a série de Fourier duma função* $f(x)$, *de período* 2π, *que admite uma derivada* $f'(x)$, *limitada e integrável, é a série de Fourier da última função.*

Seja:

$$(26) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right)$$

a série de Fourier, que converge constantemente para $f(x)$, por termos suposto que a função admite derivada.

Derivando, têrmo a têrmo, vem:

$$(27) \qquad f'(x) \sim \sum_1^\infty k \left(b_k \cos kx - a_k \operatorname{sen} kx \right),$$

devendo provar-se que está representado o desenvolvimento de Fourier, correspondente a $f'(x)$.

Com efeito, se representarmos por A_k e B_k as constantes de Fourier desta função, temos:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)\, dx = 0$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx\, dx = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx = k b_k$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \operatorname{sen} kx\, dx = -\frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx = -k a_k .$$

Está feita a verificação do teorema, podendo afirmar-se que o desenvolvimento (27) é somável $(C, 1)$, *se as descontinuïdades de* $f'(x)$ *forem de primeira espécie.*

Então, como $f'(x)$ é limitada e integrável, de período 2π, a série (27) tem por soma generalizada $f'(x)$, excluindo pontos dum conjunto de medida nula.

Também podemos enunciar:

Se $f'(x)$ fôr contínua, (27) pode divergir, mas as somas de Fejér convergem uniformemente para $f'(x)$.

Se a função $f'(x)$ fôr contínua e de variação limitada, (27) converge uniformemente, e então a sua soma no sentido ordinário é, em virtude do teorema clássico sôbre a derivação das séries, $f'(x)$.

Se $f(x)$ fôr indefinidamente derivável, as séries que se obtêm por derivações sucessivas são sempre séries de Fourier, uniformemente convergentes, tendo por somas as derivadas sucessivas de $f(x)$.

Sòmente temos a acrescentar que o último teorema é uma conseqüência imediata do seguinte:

A série de Fourier relativa a uma função de período 2π, que admite derivada, satisfazendo a uma condição de Lipschitz de ordem α, é uniformemente convergente, sendo $0 < \alpha \leqq 1$.

Com efeito, podemos determinar uma constante M, tal que seja:

$$| f'(x_2) - f'(x_1) | \leqq M | x_2 - x_1 |^{\alpha},$$

sendo arbitrários os valores de x_1 e x_2.

Como $f'(x)$ é contínua, o primeiro membro da desigualdade admite um máximo, quando os valores x_1 e x_2 satisfizerem à condição $| x_2 - x_1 | \leqq \delta$ e representamos êsse máximo *(módulo de continuïdade)* por $\omega(\delta)$.

Assim, a condição de Lipschitz, a que satisfaz a função periódica $f'(x)$, pode exprimir-se pela desigualdade

$$\omega(\delta) \leqq M \delta^{\alpha},$$

sendo δ arbitrário.

Se designarmos por A_k e B_k as constantes de Fourier relativas a $f'(x)$, que estão relacionadas com as de $f(x)$ pelas fórmulas

$$A_k = kb_k \quad , \quad B_k = -ka_k ,$$

teremos, em virtude da periodicidade da função,

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos kx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\cos kx\,dx$$

ou

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f'(x) - f'\left(x+\frac{\pi}{k}\right)\right]\cos kx\,dx ,$$

resultando

$$|A_k| \leq \frac{1}{2\pi}\,\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)\int_0^{2\pi} dx = \omega\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

e do mesmo modo

$$|B_k| \leq \omega\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Vem, portanto:

$$|a_k| \leq \frac{1}{k}\,\omega\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad , \quad |b_k| \leq \frac{1}{k}\,\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

e

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k| + |b_k|\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}\,\omega\left(\frac{\pi}{k}\right) < 2M\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^\alpha}{k^{1+\alpha}} .$$

Fazendo crescer n indefinidamente, $2M\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^\alpha}{k^{1+\alpha}}$ tende para um limite, porque é a soma de n têrmos duma série convergente.

O mesmo acontece ao primeiro membro da desigualdade e, portanto, é convergente a série $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$.

O teorema está demonstrado, porque assim é uniformemente convergente a série de Fourier, que corresponde à função $f(x)$.

FIM.

ÍNDICE

Pág.

PREFÁCIO 7

CAPÍTULO I — MÉTODOS SOMATÓRIOS DAS SÉRIES 9

I — Generalização do conceito da soma duma série 9
II — Método somatório de Cesàro. 19
III — Métodos somatórios exponenciais 35
IV — Séries absolutamente somáveis 44
V — Séries inteiras absolutamente somáveis 53

CAPÍTULO II — APLICAÇÃO DAS SÉRIES ABSOLUTAMENTE SOMÁVEIS AO PROLONGAMENTO ANALÍTICO 65

CAPÍTULO III — SÉRIES DE FOURIER 69

I — Generalidades 69
II — Critérios de convergência 72
III — Singularidades de séries de Fourier de funções contínuas . 86
IV — Somas de Fejér. 92
V — Funções definidas por séries de Fourier. 98
VI — Operações sôbre as séries de Fourier 108