NCURSO
NIA
NICA
PHIA
L

Ao distincto lente da

Academia Polytechnica

e seu Pae o Ex.mo Sr.

Dr. Antonio Joaquim

Ferreira da Silva como

prova de consideração

DISSERTAÇÃO

e respeito off.

Manoel [illegible] Gonçalves

Manoel A. Gonçalves

EQUILIBRIO ELECTRICO
NOS
CONDUCTORES

DISSERTAÇÃO

APRESENTADA

Ao jury da Academia Polytechnica do Porto

PARA O

CONCURSO AO LOGAR DE PROFESSOR DA SECÇÃO DE PHILOSOPHIA

PORTO
IMPRENSA CIVILISAÇÃO = SANTOS & LEMOS
19 — Campinho (Entreparedes) — 19

1884

Condições do equilibrio electrico nos conductores Coefficientes de potencial e inducção

Para que n'um systema de conductores carregados com determinadas cargas electricas haja equilibrio é necessario que a força electromotriz seja nulla no interior de cada um.

N'um ponto cujas coordenadas em relação a tres eixos rectangulares são x, y e z, a força electromotriz póde ser representada, como se sabe, por

$$\sqrt{\frac{dV}{dx}\Big]^2 + \frac{dV}{dy}\Big]^2 + \frac{dV}{dz}\Big]^2}$$

sendo V o potencial, e portanto para haver equilibrio deve ser

$$\frac{dV}{dx}=o, \quad \frac{dV}{dy}=o, \quad \frac{dV}{dz}=o,$$

isto é, constante o potencial no interior de cada conductor.

A densidade electrica ρ em qualquer ponto deve satisfazer á equação de Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=o$$

e ser por isso nulla tambem no interior de cada conductor.

Toda a carga electrica do systema distribue-se, pois, á superficie dos conductores.

A sua densidade superficial n'um certo ponto de um conductor é o quociente da derivada do potencial em ordem á normal á superficie de esse conductor dividida por -4π.

Quando são determinados os valores do potencial no interior de cada conductor e as cargas de todos os conductores ha uma unica distribuição de electricidade em equilibrio sobre elle; porque se fosse possivel haver duas differentes a sobreposição de uma á outra, mudando n'uma o signal da densidade, seria um estado de equilibrio em que todos os conductores teriam uma carga nulla e estariam no estado neutro, isto é, a densidade de uma distribuição em qualquer ponto de um conductor seria egual á da outra no mesmo ponto.

Ha, portanto, um unico estado de equilibrio.

Entre os potenciaes dos conductores de um systema em equilibrio e as suas cargas ha relações que convém estudar.

Se representarmos por $V_1, V_2 \ldots V_s \ldots V_n$ os potenciaes dos n conductores $A_1, A_2 \ldots A_s \ldots A_n$ de um systema, por $e_1, e_2 \ldots e_r \ldots e_n$ as suas cargas, $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_r \ldots \sigma_n$ as suas densidades e por $r_1, r_2 \ldots r_r \ldots r_n$ as distancias de um ponto qualquer da sua superficie a um ponto interior a A_s é

$$V_s = \int \frac{\sigma_1 ds_1}{r_1} + \int \frac{\sigma_2 ds_r}{r_2} + \ldots + \int \frac{\sigma_n ds_n}{r_n}$$

Suppondo que as cargas $e_1, e_2 \ldots e_n$ se tornam em $a_1 e_1, a_2 e_2 \ldots a_n e_n$ será

$$V_s = a_1 \int \frac{\sigma_1 ds_1}{r_1} + \ldots + a_n \int \frac{\sigma_n ds_n}{r_n} \quad e$$

portanto cada termo de V_s varia proporcionalmente á carga de cada conductor. O potencial de qualquer conductor é, pois, uma funcção linear das cargas de todos os outros, isto é, é

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{r1}e_r + \ldots + p_{n1}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_s = p_{1s}e_1 + p_{2s}e_2 + \ldots + p_{rs}e_r + \ldots + p_{ns}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{rn}e_r + \ldots + p_{nn}e_n \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Os coefficientes p_{rs} chamam-se coefficientes de potencial. Dos seus dois suffixos o primeiro corresponde ao da carga e o segundo ao do potencial.

Ha n coefficientes da fórma p_{rr}, um para conductor, que representam o potencial que teria cada conductor se a sua carga se tornasse egual á unidade e a de todos os outros nulla.

Os restantes n $(n\text{-}1)$ coefficientes representam o potencial que teria cada conductor se o seu potencial se reduzisse a zero conjunctamente com o de todos os outros menos um que conserva um potencial egual á unidade.

Estes n $(n\text{-}1)$ coefficientes não são comtudo todos differentes; os da fórma p_{rs} são eguaes aos da fórma p_{sr} por ser

$$p_{rs}=\frac{dV_s}{de_r}=d\frac{\frac{dW}{de_s}}{de_r}=d\frac{\frac{dW}{de_r}}{de_s}=\frac{dV_r}{de_s}=p_{sr}$$

Suppondo que o conductor A_r tem uma carga egual á unidade e todos os outros uma carga nulla será p_{rr} o potencial de A_r e o de qualquer dos outros, A_s por exemplo, será p_{rs} e é $p_{rr}=p_{rs}$, se A_r envolver A_s; porém se A_s é exterior a A_r é $p_{rr}>p_{rs}$, porque, sendo nulla a carga de A_s, o numero de linhas de força, que terminam em A_s, deve ser egual ao das que partem d'elle e, como as que entram n'este conductor vem de um logar em que o potencial é mais elevado e as que sáem vão para um logar de menor potencial, o potencial de A_s será intermedio entre o mais alto e o mais baixo potencial do campo e portanto será menor que p_{rr} e maior do que zero.

Podemos por isso concluir que todos os coefficientes de potencial são positivos e que nenhum da fórma p_{rs} é maior do que p_{rr} ou p_{ss}.

Resólvendo as equações (1) em ordem a $e_1, e_2 \ldots e_n$ obtem-se

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = q_{11}V_1 + \ldots + q_{1s}V_s + \ldots + q_{1n}V_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_r = q_{r1}V_1 + \ldots + q_{rs}V_s + \ldots + q_{rn}V_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = q_{n1}V_1 + \ldots + q_{ns}V_s + \ldots + q_{nn}V_n \end{array}\right\} \ldots\ldots(2)$$

Teremos analogamente n coefficientes da fórma q_{rr} que representam a carga, que teria cada conductor se o seu potencial se reduzisse á unidade e o de todos os outros a zero.

Estes coefficientes denominam-se a capacidade electrica do conductor a que se referem.

Os outros n $(n\text{-}1)$ coefficientes denominam-se coefficientes de inducção e representam a carga, que teria cada conductor se o seu potencial fosse nullo conjunctamente com o de todos os outros menos um que tem um potencial egual á unidade.

Como os coefficientes de potencial não são todos differentes; os da fórma q_{rs} são eguaes aos da fórma q_{sr} por ser

$$q_{rs} = \frac{de_r}{dV_s} = d\frac{\frac{dW}{dV_r}}{dV_s} = d\frac{\frac{dW}{dV_s}}{dV_r} = \frac{de_s}{dV_r} q_{sr}$$

Se suppozermos que A_r tem um potencial egual á unidade e todos os outros conductores um potencial nullo será q_{rr} a carga de A_r e q_{rs} a de outro A_s.

q_{rr} representa o numero de linhas de força que partem do conductor A_r e d'estas linhas algumas terminam nos outros conductores e outras dirigem-se para uma distancia infinita se nenhum dos conductores cerca A_r.

Dos outros conductores não pode partir nenhuma linha de força, porque não ha no campo nenhum logar em que o potencial tenha menor valor do que o que tem n'elles. Por isso nunca a sua carga póde ser maior do que zero e só pode ser zero para alguns, se elles ficarem separados de A_r por um dos restantes que deve cercar A_r.

Os coefficientes de inducção de um conductor A_r nunca são, pois, positivos e em valor absoluto a sua somma é egual á capacidade d'este conductor se alguns dos restantes conductores do systema envolve A_r e menor do que ella no caso contrario.

Quando se ajunta a um systema de conductores em equilibrio um novo conductor sem carga, o coefficiente de potencial da forma p_{rr} de qualquer dos primeiros A_r diminue de valor, porque, suppondo que A_r tem uma carga egual a unidade e todos os demais conductores do systema uma carga nulla, a energia do systema será

$$W = \frac{1}{2} e_r V_r = \frac{1}{2} e_r^2 p_{rr}$$

e, como a electricidade deve caminhar dos logares de maior potencial para os de menor, quando ao systema se ajunta um novo conductor sem carga a energia deve diminuir e portanto p_{rr}.

Se ao novo systema se accrescenta um outro conductor o valor de p_{rr} diminuirá de novo e ainda mais, se este conductor se põe em communicação com o primeiro, que se ajuntou. Portanto a diminuição, que soffre p_{rr} por se ter ajuntado ao systema um conductor sem carga, é maior do que a que produziria um corpo cuja superficie póde ser inscripta n'este conductor e menor do que a produzida por um corpo cuja superficie lhe póde ser circumscripta.

A diminuição que produz no valor de p_{rr} um corpo qualquer é, pois, menor do que a produzida por uma esphera cujo diametro seja a maior dimensão do corpo.

Se as dimensões do conductor que se ajunta são muito pequenas em relação á distancia a que elle está do systema, podemos considerar como uma primeira approximação para o valor de p_{rr} o reciproco da capacidade de A_r quando só no campo.

Representando, pois, por C_1 a capacidade de um conductor A_1 por C_2 a de outro A_2 e por d a distancia entre A_1 e A_2 e, se d fôr muito grande em relação ás dimensões de A_1 e A_2, será approximadamente

$$p_{11}=\frac{1}{C_1},\, p_{12}=\frac{1}{d},\, p_{22}=\frac{1}{C_2}.$$

$$V_1 = e_1 C^{-1} + e_2 d^{-1}$$
$$V_2 = e_1 d^{1-1} + e_2 C_2^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_{11} = C_1(1 - C_1 C_2 d^{-2})^{-1} \\ q_{12} = - C_1 C_2 d^{-1}(1 - C_1 C_2 d^{-1})^{-1} \\ q_{22} = C_2(1 - C_1 C_2 d^{-1})^{-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

O coeficiente de potencial de qualquer conductor A_1 n'outro A_2, quando ao systema a que estes conductores pertencem se addiciona um condnctor espherico ou proximamente espherico A_3 de pequenas dimensões em relação ás distancias dos conductores, augmenta, se A_3 é interior ao circulo cujo diametro é a linha recta que une A_1 com A_2, e diminue quando A_3 é exterior; porque, suppondo que A_1 tem um potencial igual á unidade, no lado de A_3 que fica mais proximo de A_1 haverá uma carga $-m$ e $+m$ no lado mais afastado e o potencial em A_2 devido a estas cargas será positivo ou negativo segundo estiver mais proxima de A_2 a carga $+m$ ou $-m$ e, portanto, segundo A_3 fôr interior ou exterior ao circulo cujo diametro é a linha recta que une A_1 com A_2.

Se o conductor A_3 tem uma fórma alongada póde augmentar o coefficiente de potencial de A_1 em A_2 até quando A_3 é exterior a este circulo e o eixo maior de A_3 tem a direcção da tangente ao circulo no ponto em que o raio que passa por A_3 encontra a circumferencia, e diminuil-a quando fôr interior, se o seu eixo maior tiver a direcção do raio que passa por A_3.

A capacidade de qualquer conductor de um systema augmenta e os seus cofficientes de inducção diminuem, se ao systema se ajunta um conductor; porque suppondo que um conductor A_1 tem um potencial egual á unidade e todos os outros um potencial nullo, a carga do novo conductor será negativa e produzirá uma carga positiva sobre todos os outros, isto é, augmentará a de A_1 e diminuirá a de todos os outros.

Vimos como variavam os coefficientes de potencial e de inducção, quando no campo se introduzia um conductor de pequenas dimensões. É egualmente facil calcular approximadamente o effeito de um condensador, isto é, de um systema de dous conductores tão proximos um do outro que o coefficiente de mutua inducção seja muito grande, sobre os coefficientes de outro condensador.

Representando por A_1 e A_2 os conductores de um condensador e adoptando a notação das equações (1) e (2) será

$$p_{11}=\frac{q_{22}}{M},\ p_{12}=\frac{q_{12}}{M},\ p_{22}=\frac{q_{11}}{M}$$

fazendo $q_{11}\ q_{22}-q_{12}^2=M$

Para outro condensador cujos conductores sejam A_3 e A_4 é

$$p_{33}=\frac{q_{44}}{N},\ p_{34}=\frac{q_{34}}{N},\ p_{44}=\frac{q_{33}}{N}$$

fazendo $q_{33}\ q_{44}-q_{34}^2=N$

Se estes dois condensadores existirem n'um meio isolador indefinido a uma distancia D um do outro muito grande em relação ás suas dimensões os valores d'estes coefficientes não serão alterados sensivelmente e como é approximadamente

$$p_{13}=p_{14}=p_{23}=p_{24}=\frac{1}{D}$$

as equações dos potenciaes são

$$V_1=\frac{q_{22}}{M}e_1-\frac{q_{12}}{M}e_2+\frac{1}{D}e_3+\frac{1}{D}e_4$$

$$V_2=-\frac{q_{12}}{M}e_1+\frac{q_{11}}{M}e_2+\frac{1}{D}e_3+\frac{1}{D}e_4$$

$$V_3=\frac{1}{D}e_1+\frac{1}{D}e_2+\frac{q_{44}}{N}e_3-\frac{q_{34}}{N}e_4$$

$$V_4=\frac{1}{D}e_1+\frac{1}{D}e_2-\frac{q_{34}}{N}e_3+\frac{q_{33}}{N}e_4$$

Representando por Q_{11} a capacidade do conductor A_1, por Q_{12}, Q_{13} e Q_{14} os coefficientes de inducção de A_1 sobre os outros conductores e fazendo

$$\begin{aligned} q_{11}+q_{12}&=C_1\\ q_{12}+q_{22}&=C_2\\ q_{33}+q_{34}&=C_3\\ q_{34}+q_{44}&=C_4 \end{aligned}$$

é

$$\left.\begin{aligned} Q_{11}&=q_{11}+\frac{C_1^2(C_3+C_4)}{D^2-(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\\ Q_{12}&=q_{12}+\frac{C_1C_2(C_3+C_4)}{D^2-(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\\ Q_{13}&=-\frac{D\,C_1\,C_3}{D^2-(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\\ Q_{14}&=-\frac{D\,C_1\,C_4}{D^2-(C_1+C_2)(C_3+C_4)} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(4)$$

Por modo analogo poderiamos determinar approximadamente as capacidades e coefficientes de inducção dos outros conductores e portanto avaliar o effeito de um condensador sobre os coefficientes de outro, que está a uma distancia muito grande do primeiro em relação ás suas dimensões.

As quantidades C_1, C_2, C_3 e C_4 são todas positivas e representam a carga que adquiriria cada conductor se o condensador a que pertence existisse isoladamente tendo as suas armaduras um potencial egual á unidade.

Pelas equações (4) podemos avaliar a influencia, que um conductor póde ter sobre os coefficientes de um condensador, e as capacidades e o coefficiente de inducção de dous corpos que estão muito distantes um do outro.

Basta para isso no primeiro caso fazer $q_{34}=q_{44}=o$ o que dá

$$Q_{11} = q_{11} + \frac{C_1^2\, q_{33}}{D^2 - q_{33}(C_1+C_2)}$$

$$Q_{12} = q_{12} + \frac{C_1\, C_2\, q_{33}}{D^2 - q_{33}(C_1+C_2)}$$

$$Q_{13} = - \frac{D\, C_1\, q_{33}}{D^2 - q_{33}(C_1+C_2)}$$

e no segundo $q_{12}=q_{22}=q_{34}=q_{44}=o$ o que torna (4) em

$$Q_{11} = q_{11} + \frac{q^2_{11}\, q_{33}}{D^2 - q_{11}\, q_{33}}$$

$$Q_{13} = - \frac{D\, q_{11}\, q_{33}}{D^2 - q_{11}\, q_{33}}$$

Era possivel ainda achar expressões analogas a (4) para um systema de mais de dois condensadores a distancias muito grandes uns dos outros e d'ellas deduzir as que approximadamente exprimem as capacidades e coefficientes de inducção quando substituissemos condensadores por simples conductores.

E' possivel, pois, determinar facilmente n'alguns casos os valores approximados da capacidade e coefficientes de potencial e inducção. N'outros é até possivel determinar o seu valor exacto, mas em geral o calculo mathematico d'estas quantidades apresenta grandes difficuldades.

Isto obriga, para resolver o problema do equilibrio electrico em casos particulares, a recorrer a differentes methodos que tentaremos expôr nos capitulos seguintes.

Por estes meios pretende-se determinar uma funcção (potencial) das coordenadas a que se suppõe referidos os conductores do systema, que satisfazendo á equação de Poisson seja nulla a uma distancia infinita dos conductores e que em cada um tenha um valor constante.

A densidade electrica n'um certo ponto de cada conductor será o quociente da derivada d'esta funcção em ordem á normal á superficie do conductor no mesmo ponto dividida por—4 π, e a carga sobre uma determinada porção da superficie de um conductor o integral d'esta expressão tendo por limites os limites da porção da superficie.

Equilibrio electrico n'alguns casos simples

Duas espheras concentricas.—Se as camadas electricas em equilibrio distribuidas sobre duas espheras concentricas de raios r_1 e r_2 sendo $r_1 > r_2$ tem potenciaes V_1 e V_2, ó potencial em qualquer ponto comprehendido entre as duas superficies esphericas é uma funcção da distancia r d'esse ponto ao centro commum das espheras e portanto a equação de Laplace será n'este caso

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=o$$

d'onde

$$V=\frac{V_2r_2-V_1r_1}{r_2-r_1}+\frac{V_2-V_1}{r_1-r_2}\;\frac{r_1\,r_2}{r}$$

A densidade da camada espherica de menor raio é

$$\sigma_2=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dV}{dr}\right]_{r=r_2}=\frac{r_1}{4\pi r_2}\;\frac{V_1-V_2}{r_1-r_2}$$

e a densidade da de maior raio

$$\sigma_1=-\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dV}{dr}\right]_{r=r_1}=\frac{r_2}{4\pi r_1}\;\frac{V_2-V_1}{r_1-r_2}$$

A carga total da esphera interna será

$$m_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2 = \frac{V_2 - V_1}{r_1 - r_2} r_1 r_2 = -m_1$$

representando por m_1 a carga da esphera de maior raio.

A capacidade da esphera de menor raio é $\frac{r_1\,r_2}{r_1 - r_2}$.

Se é $r_1 = \infty$, isto é, se existe uma só esphera de raio r_2 e potencial V_2 n'um meio isolador indefinido, o seu potencial em qualquer ponto externo a ella é $\frac{V_2 r_2}{r}$.

A sua densidade electrica é $\frac{V_2}{4\pi r_2}$, a sua carga $V_2\,r_2$ e a sua capacidade r_2.

Quando a superficie espherica de raio r_1 é a superficie interna de um conductor cuja superficie externa é outra superficie espherica de raio r_3 concentrica com a de raio r_1 e se no campo não existem mais conductores, a carga, que tem a superficie de raio r_3, é $V_1\,r_3$ e portanto será

$$E = \frac{r_1\,r_2}{r_1 - r_2}(V_1 - V_2) + V_1\,r_3$$

a carga total do conductor externo.

O systema formado pela esphera de raio r_2 e este conductor externo é um condensador fechado e a força condensante, isto é, a relação entre a capacidade do conductor interno quando pertence a este systema e a sua capacidade quando o conductor externo não existe é

$$F = \frac{r_1}{r_1 - r_2}.$$

N'este caso é facil calcular os coefficientes de potencial e inducção.

Visto que as cargas das duas armaduras são

$$m_r = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}(V_2 - V_1) \quad \text{e}$$

$$E = -\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} V_2 + \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} + r_3\right) V_1$$

o coefficiente de mutua inducção é $-\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$ e são $\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$, $\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} + r_3$ as capacidades.

Os coefficientes de potencial achar-se-iam com egual facilidade resolvendo estas equações em ordem a V_2 e V_1.

Pelas expressões da densidade de cada armadura vê-se que ella varia approximadamente na razão inversa da distancia entre os dois conductores.

Isto ainda é verdadeiro para qualquer condensador fechado, porque, sendo a densidade n'um ponto o quociente da derivada do potencial em ordem á normal n'esse ponto dividida por -4π, se a distancia entre as duas armaduras fôr muito pequena, esta derivada differirá pouco do quociente da differença de potencial das duas superficies pela distancia que as separa.

Se portanto representarmos por V_1 e V_2 os potenciaes das armaduras, por d_1 a densidade da armadura interna e por e a espessura do dielectrico que as separa será approximadamente

$$d_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}$$

A carga da armadura interna de um condensador fechado cujas armaduras estão a uma distancia constante uma da outra será, pois, $\frac{V_1 - V_2}{4\pi e} S$ approximadamente, representando por S a superficie d'està armadura.

Dois cylindros circulares concentricos. — Suppondo que são r_1 e r_2 os raios de dois cylindros circulares concentricos sendo $r_1 > r_2$, V_1 e V_2 os seus potenciaes, o potencial em qualquer ponto comprehendido entre elles será uma funcção da distancia r d'esse ponto ao eixo commum e portanto a equação de Laplace tornar-se-ha n'este caso

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{dV}{dr} = o$$

que será satisfeita por

$$V = \frac{V_2 l.\frac{r_1}{r} + V_1 l.\frac{r}{r_2}}{l.\frac{r_1}{r_2}}$$

As densidades electricas dos dois cylindros são

$$\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi r_1 l.\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\sigma_2 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi r_2 l.\frac{r_1}{r_2}}$$

as suas cargas n'uma extensão d

$$m_2 = \frac{1}{2} \frac{V_2 - V_1}{l.\frac{r_1}{r_2}} d = - m_1$$

e a capacidade da mesma extensão do cylindro interior

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{l.\frac{r_1}{r_2}}$$

N'este caso era facil calcular os coefficientes de potencial e inducção por um processo analogo ao que seguimos para o caso de duas superficies esphericas concentricas.

Dois planos infinitos e parallelos.—Se são V_1 e V_2 os potenciaes de dois planos parallelos e infinitos e d a distancia de um ao outro o potencial n'um ponto que esteja a uma distancia r de um dos planos é uma funcção d'esta distancia e por isso será

$$\frac{d^2 V}{d\, r^2}=o$$

d'onde

$$V=V_1+(V_2-V_1)\frac{r}{d}$$

As densidades superficiaes dos dois planos serão

$$\sigma_1=\frac{1}{4\pi}\;\frac{V_1-V_2}{d}=-\sigma_2$$

as cargas distribuidas sobre uma superficie S

$$m_1=\frac{S}{4\pi}\;\frac{V_1-V_2}{d}=-m_2$$

e a capacidade d'esta mesma superficie

$$C=\frac{S}{4\pi d}$$

Distribuição da electricidade nas superficies com centro de segunda ordem

A equação

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2-b^2}+\frac{z^2}{p^2-c^2}=1$$

representa, como se sabe, as tres superficies com centro de segunda ordem, ellipsoide, hyperboloide de um só ramo e hyperboloide de dois ramos, segundo é $p>c$ ou $c>p>b$ ou $b>p$, suppondo que é sempre $c>b$.

Estas tres superficies encontram-se em oito pontos cujas coordenadas satisfazem ás equações

$$b\,c\,x=\pm p_1 p_2 p_3$$

$$y^2 b^2 (b^2-c^2)=(p_1{}^2-b^2)(p_2{}^2-b^2)(p_3{}^2-b^2)$$

$$z^2 c^2 (c^2-b^2)=(p_1{}^2-c^2)(p_2{}^2-c^2)(p_3{}^2-c^2)$$

sendo p_1 o valor de p para o ellipsoide, p_2 para o hyperboloide de um só ramo e p_3 para o de dois.

O potencial em qualquer ponto, que sempre se póde considerar como um dos pontos de intercepção das tres superficies de segunda ordem, é uma funcção de p_1, p_2 e p_3.

Para o exprimir em funcção d'estas quantidades avaliemos a somma das componentes da força electrica normaes á superficie de um elemento de volume limitado pelas superficies, cujos parametros são p_1, p_2, p_3 e p_1+dp_1, p_2+dp_2, p_3+dp_3.

Representando por V o potencial e por ds_1, ds_2, ds_3 os elementos das curvas de intercepção dos dois hyperboloides, do hyperboloide de dois ramos com o ellipsoide e d'este com o hyperboloide de um só ramo a força electrica na direcção de ds_1 será

$$-\frac{dV}{ds_1}=-\frac{dV}{dp_1}\frac{dp_1}{ds_1}=-\frac{dV}{dp_1}\frac{A_1}{P_2P_3}$$

fazendo $A_1^2=(b^2-p_1^2)(c^2-p_1^2)$

$$P_2^2=p_3^2-p_1^2$$

$$P_3^2=p_2^2-p_1^2$$

por ser

$$\left(\frac{ds_1}{dp_1}\right)^2=\left(\frac{dx}{dp_1}\right)^2+\left(\frac{dy}{dp_1}\right)^2+\left(\frac{dz}{dp_1}\right)^2=\frac{P_2P_3}{A_1}$$

A somma dos componentes da força electrica normaes ao elemento de superficie ds_2, ds_3 é

$$-\frac{dV}{dp_1}\frac{A_1}{P_2P_3}ds_2\,ds_3=-\frac{dV}{dp_1}\frac{A_1\,P_1^2}{A_2A_3}dp_2\,dp_3$$

fazendo $P_1^2 = p_3^2 - p_2^2$

$$A_2 = (p_2^2 - b^2)\,(c^2 - p_2^2)$$

$$A_3 = (p_3^2 - b^2)\,(p_3^2 - c^2)$$

por ser

$$ds_2 = \frac{P_1\,P_3}{A_2}\,dp_2$$

$$ds_3 - \frac{P_1\,P_2}{A_3}\,dp_3$$

Para o elemento correspondente da superficie $p_1 + dp_1$ esta somma é

$$\frac{d\,V}{dp_1}\frac{A_1\,P_1^2}{A_2\,A_3}\,dp_2\,dp_3 + \frac{d^2\,V}{dp_1^2}\frac{A_1\,P_1^2}{A_2 A_3}\,dp_1\,dp_2\,dp_3 +$$

$$+ \frac{d\,V}{dp_1}\frac{dA_1}{dp_1}\frac{dp_1\,dp_2\,dp_3}{A_2\,A_3}P_1^2$$

Para as duas faces oppostas é portanto

$$\frac{d^2\,V}{dp_1^2}\,\frac{A_1 P_1^2 dp_1 dp_2 dp_3}{A_2 A_3} + \frac{d\,V}{dp_1}\,\frac{dA_1}{dp_1}\,\frac{P_1^2 dp_1 dp_2 dp_3}{A_2 A_3}$$

Calculando o valor da somma das componentes da força electrica normaes aos dois pares de faces restantes e sommando todas estas quantidades com a carga do elemento de volume multiplicada por 4π deve esta somma ser nulla, isto é, é

$$P_1^2\left(A_1^2\frac{d^2V}{dp_1^2}+A_1\frac{dV}{dp_1}\frac{dA_1}{dp_1}\right)+P_2^2\left(A_2^2\frac{d^2V}{dp_2^2}+A_2\frac{dV}{dp_2}\frac{dA_2}{dp^2}\right)+$$

$$+P_3^2\left(A_3^2\frac{d^2V}{dp_3^2}+A_3\frac{dV}{dp_3}\frac{dA_3}{dp_3}\right)+$$

$$+4\pi\rho\, P_1^2\, P_2^2\, P_3^2=o\ldots\ (5)$$

representando por ρ a densidade electrica do elemento de volume.

Para que n'esta equação só entrem derivados de segunda ordem do potencial é necessario que as quantidades contidas nos parenthesis sejam respectivamente eguaes a

$$c\frac{d^2V}{du_1^2},\ c\frac{d^2V}{du_2^2},\ c\frac{d^2V}{du_3^2}$$

e que portanto seja

$$du_1=\frac{cdp_1}{A_1}$$

$$du_2=\frac{cdp_2}{A_2}$$

$$du_3=\frac{cdp_3}{A_3}$$

com estas condições a equação (5) torna-se em

$$P_1^2\frac{d^2V}{du_1^2}+P_2^2\frac{d^2V}{du_2^2}+P_3^2\frac{d^2V}{du_3^2}+4\pi\rho\frac{P_1^2\, P_2^2\, P_3^2}{c}=o\ldots\ (6)$$

que é a forma da equação de Poisson referida ás coordenadas u_1, u_2, u_3.

As quantidades u_1, u_2, u_3 são tres integraes ellipticos que se pódem reduzir á forma ordinaria fazendo $b=kc$, $k^2+k'^2=1$.

$$p_1=\frac{c}{cr.\alpha}$$

$$p_2=\sqrt{c^2\,sen.^2\,\beta+b^2 cr.^2\,\beta}$$

$$p_3=b\,sen\,\gamma$$

com estas hypotheses é

$$u_1=F(k,{}^1/_2\pi)-F(k,\alpha)$$

$$u_2=F(k,{}^1/_2\pi)-F(k',\beta)$$

$$u_3=F(k,\gamma)$$

Dois ellipsoides. — Quando u_1 é constante a superficie correspondente é um ellipsoide. Como a equação (6) é satisfeita se V é uma funcção linear de u_1, o potencial de dois ellipsoides n'um ponto comprehendido entre elles é

$$V=\frac{u'_1 V''-u''_1 V'+u_1(V'-V'')}{u'_1-u''_1}$$

se são u'_1, u''_1 os valores de u_1 para estes ellipsoides e V' e V'' os seus potenciaes.

A densidade em qualquer ponto é

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{du_1}\frac{du_1}{ds_1}=-\frac{1}{4\pi}\frac{V'-V''}{u'_1-u''_1}\frac{c}{p^2p^3}=$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{V'-V''}{u'_1-u''_1}\frac{cd_1}{D_1}$$

se d_1 representa a perpendicular baixada do centro sobre o plano tangente no ponto cuja densidade é σ e D_1 o producto dos semi-eixos.

A carga total Q'' de um ellipsoide é

$$Q''=C\frac{V'-V''}{u'_1-u''_1}=-Q'$$

representando por Q' a carga do outro.

Se é $u'_1=o$ é $\alpha={}^1/_2\,\pi$ e $p_1=\infty_1$ isto é, o ellipsoide cujo potencial é V' está a uma distancia infinita do outro.

Se portanto fizermos $u'_1=o$ e $V'=o$ na expressão de Q'' e σ obtemos a carga electrica e densidade em qualquer ponto de um ellipsoide collocado n'um meio isolador indefinido.

Representando por Q_1 a carga de um ellipsoide cujo potencial é V_1, por σ_1 a sua densidade é, pois,

$$Q_1=C\frac{V}{u_1}$$

e

$$\sigma_1=\frac{Q_1}{4\pi}\,\frac{d_1}{D_1}=\frac{Q_1}{4\pi ABC}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}}$$

se A, B e C são os semi-eixos do ellipsoide.

Se C é infinitamente pequeno o ellipsoide transforma-se n'um disco elliptico infinitamente delgado cuja densidade electrica é

$$\sigma_2 = \frac{Q_1}{4\pi AB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}}}$$

Se o disco é circular é $A = B$ e será

$$\sigma_3 = \frac{Q_1}{4\pi A^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{A^2}}} = \frac{Q_1}{4\pi A^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{A^2}}}$$

a sua densidade electrica, representando por r a distancia de qualquer ponto ao centro do disco.

Dois hyperboloides de um só ramo.—Se u_2 é constante a superficie que lhe corresponde é um hyperboloide de um só ramo.

O potencial em qualquer ponto comprehendido entre dois hyperboloides de um só ramo será

$$V = \frac{u'_2 V'' - u''_2 V' + u_2 (V' - V'')}{u'_2 - u''_2}$$

se são u'_2, u''_2 os valores de u_2 para estes dois hyperboloides e V' e V'' os seus potenciaes.

A densidade em qualquer ponto de um d'elles é

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{V' - V''}{u'_2 - u''_2} \frac{d_2}{D_2}$$

representando por d_2 a perpendicular baixada do centro sobre o plano tangente e D_2 o producto dos semi-eixos.

A sua carga é infinita.

Dois hyperboloides de dois ramos.—Quando u_3 é constante a superficie correspondente é um hyperboloide de dois ramos.

Se u'_3 e u''_3 são os valores de u_3 para dois hyperboloides e V' e V'' os seus potenciaes, o potencial em qualquer ponto comprehendido entre elles será

$$V=\frac{u'_3 V''-u''_3 V'+u_3(V'-V'')}{u'_3-u''_3}$$

A densidade electrica em qualquer ponto é

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\,\frac{V'-V''}{u'_3-u''_3}\,\frac{cd_3}{D_3}$$

d_3 e D_3 representam n'este caso o mesmo que d_2 e D_2 no caso de dois hyperboloides de um só ramo.

A sua carga total é infinita.

Temos supposto sempre que b e c são finitos, differentes de zero e que é $c>b$, mas podia-se determinar tambem a distribuição de electricidade nas superficies, que a 1.ª equação de pag. 19 representa, quando é $c=b$ ou $b=o$ ou $c=\infty$.

Imagens electricas

Se para um systema de n conductores, cujas cargas são m_1, m_2... m_n ha uma superficie equipotencial, que envolve todos ou parte d'estes conductores e, se sobre esta superficie suppozermos que está distribuida uma camada electrica egual á somma das camadas, que ella envolve, de modo que em cada ponto a densidade electrica seja egual ao quociente da derivada do potencial em ordem á normal a esta superficie dividida por -4π, esta camada estará em equilibrio e exercerá sobre todos os pontos externos a ella a mesma acção que os conductores que envolve e sobre os internos uma acção egual e contraria á dos conductores externos.

Com effeito, suppondo que esta superficie é a interna de um conductor em communicação com o solo influenciado pelos conductores internos, elle adquiriria uma carga egual e de signal contrario á somma algebrica das cargas de todos estes conductores, e como o potencial é nullo em todos os pontos do conductor não isolado a camada electrica, que a sua superficie interna adquire, exerce sobre todos os pontos externos a ella uma acção egual e contraria á dos conductores que envolve, e portanto uma camada electrica distribuida sobre ella do mesmo signal e valor que a somma algebrica das cargas dos conductores que envolve exercerá a mesma acção que elles para todos os pontos externos.

Substituindo, pois, os *m* conductores, que a superficie equipotencial envolve, pela camada correspondente distribuida sobre esta superficie, o novo systema estará em equilibrio e, como o potencial é constante n'esta superficie e ella não envolve nenhuma massa electrica, elle será tambem constante no seu interior, isto é, esta camada exerce sobre todos os pontos internos uma acção egual e contraria á dos conductores externos.

Um qualquer dos dois systemas de conductores electrizados, o que a superficie envolve ou o externo a ella, denomina-se a imagem electrica do outro.

Entre estas imagens e as imagens virtuaes da optica ha uma certa analogia, mas as propriedades geometricas d'estas ultimas não são sempre applicaveis ás imagens electricas.

Se se podesse conhecer a carga e posição das imagens electricas de qualquer systema de pontos em relação a qualquer superficie, ter-se-hia resolvido o problema da influencia electrica de um systema de pontos sobre uma superficie e seria facil pelo methodo de inversão, de que adiante fallaremos quando estudarmos a influencia de um ponto sobre uma esphera, conhecer a distribuição da electricidade sobre um conductor que tivesse a mesma superficie e estivesse collocado n'um meio isolador indefinido.

A impossibilidade de determinar em todos os casos estas quantidades faz com que o methodo das imagens electricas não tenha esta generalidade. Comtudo é dos que a maior numero de casos particulares se póde applicar e o que mais simplesmente resolve as questões.

Nos paragraphos seguintes exporemos alguns dos problemas que por este meio se pódem resolver.

Influencia de um ponto ou systema de pontos sobre um plano conductor indefinido não isolado.—Se suppozermos que n'um meio isolador indefinido existem dois pontos com cargas electricas eguaes e de signaes contrarios, as superficies equipotenciaes são superficies de revolução em torno da linha que une os dois pontos. São fechadas, e para um valor do potencial differente de zero são formadas de duas partes symetricas em relação a um plano que divide ao meio a linha que une os dois pontos e lhe é perpendicular.

Se o potencial é nullo, a superficie equipotencial correspondente é o plano perpendicular á linha que une os dois e que a divide em duas partes eguaes.

Para todos os pontos, que ficam do lado d'este plano opposto áquelle em que está um dos pontos, podemos substituir este ponto por uma carga electrica egual distribuida sobre o plano, de modo que em cada ponto a densidade seja $-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$, representando por n a normal ao plano e por isso se representarmos por m a carga de um ponto por d a distancia d'este ponto a um plano indefinido a carga que este plano adquirirá pela influencia do ponto cuja carga é m será $-m$ e a sua densidade n'um ponto que esteja a uma distancia r do ponto influente $-\frac{dm}{2\pi r^3}$ por ser $\frac{dV}{dn}=\frac{2dm}{r^3}$.

É facil vêr que é $\frac{dV}{dn}=\frac{2dm}{r^3}$.

Tomando para eixo dos x a linha que une o ponto influente com a sua imagem em relação ao plano e para eixo dos y uma linha perpendicular a esta e que a divida ao meio será

$$V=m\left\{\left((x-d)+y^2\right)^{-1/2}-\left((x+d)^2+y^2\right)^{-1/2}\right\}.$$

e

$$\frac{dV}{dx}=m\left\{(x-d)\left((x-d)^2+y^2\right)^{-3/2}-(x+d)\left((x+d)^2+y^2\right)^{-3/2}\right\}$$

mas quando é $x=o$ é $\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dn}$

e $d^2+y^2=r^2$ e portanto é

$$\frac{dV}{dn}=\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=o}=\frac{2dm}{r^3}$$

Se além d'este ponto existissem mais $(n\text{-}1)$ com cargas m_1, m_2 ... m_n e a distancias d_1, d_2 ... d_n do plano, cada um d'elles far-lhe-hia adquirir uma certa distribuição de electricidade produzindo um estado de equilibrio, e, como a sobreposição de todos estes estados de equilibrio seria um novo estado de equilibrio, a carga que o plano adquiriria seria a somma das cargas dos pontos influentes tomada com signal contrario

$$-(m+m_1+m_2+\ldots\ldots+m_n)$$

e a densidade n'um ponto a somma das densidades que ella teria, se cada ponto actuasse isoladamente, isto é,

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dm}{r^3}+\frac{d_1m_1}{r_1^{\,3}}+\ldots\ldots+\frac{d_nm_n}{r_n^{\,3}}\right)$$

se representarmos por r r_1, r_2 .... r_n as distancias dos pontos influentes ao mesmo ponto do plano.

Influencia de um ponto ou systema de pontos sobre uma esphera isolada ou não.—As superficies equipotenciaes de dois pontos carregados com cargas electricas m e—m' são superficies de revolução em torno de uma linha que une estes dois pontos; e a superfificie para a qual o potencial é nullo será representada pela equação

$$\frac{m}{r}-\frac{m'}{r'}=o$$

se r e r' exprimem as distancias dos dois pontos a qualquer ponto do campo.

Esta superficie é uma esphera cujo centro está na linha que une os dois pontos.

Representando por d e d' as distancias dos dois pontos ao centro da esphera, por R o seu raio e por c a relação entre as cargas dos dois pontos é

$$C=\frac{m}{m'}=\frac{r}{r'}=\frac{R}{d'}=\frac{d}{R}$$

Visto que esta esphera envolve o ponto, cuja carga é $-m'$, podemos sem alterar o effeito para todos os pontos externos a ella substituir esta carga por uma distribuição de electricidade sobre ella, segundo as condições de pg. 27; e portanto será $-\frac{m}{c}$ a carga que adquire uma esphera não isolada de raio R cujo centro está a uma distancia d de um ponto interior a ella carregado com uma carga m.

Para calcular a densidade em qualquer ponto da esphera exprimamos o potencial em funcção de coordenadas polares cuja origem seja o centro da esphera, tomando para eixo a linha que une o ponto influente com a sua imagem em relação á esphera.

Adoptando este systema de coordenadas e representando por ρ e θ o raio vector e o angulo que elle faz com o eixo, será

$$V=m\left(\rho^2+d^2-2\rho cos.\theta\right)^{-1/2}-m'\left(\rho^2+d'^2-2\rho d' cos.\theta\right)^{-1/2}$$

$$\frac{dV}{d\rho}=-m\left(\rho-dcos.\theta\right)\left(\rho^2+d^2-2\rho dcos.\theta\right)^{-2/3}+$$

$$+m^1\left(\rho-d'cos.\theta\right)\left(\rho^2+d-^{12}2\rho d'cos.\theta\right)^{-3/2}$$

A densidade electrica n'um ponto da esphera será egual ao quociente da derivada do potencial em ordem a ρ, fazendo n'esta derivada $\rho = R$, dividida por -4π, isto é, representando por μ a densidade é

$$\mu = \frac{R^2 - d^2}{4\pi R}\frac{m}{r^3} = \frac{d'^2 - R^2}{4\pi R}\frac{m'}{r'^3}$$

Portanto a densidade electrica n'um ponto de uma superficie espherica conductora não isolada e influenciada por um ponto externo a ella varia na razão inversa do cubo da distancia do ponto da superficie espherica ao ponto influente ou á sua imagem.

Se o ponto influente é interno á esphera não isolada podemos para todos os pontos internos a ella substituir a distribuição de electricidade, que adquire, pela imagem d'este ponto em relação á esphera, e portanto a densidade electrica em cada ponto será egual e de signal contrario á que no mesmo ponto teria, se fosse influenciada pela imagem do ponto influente.

A sua carga será egual e de signal contrario á do ponto influente.

Se a esphera não está isolada e o seu potencial é V' a carga que ella adquire pela influencia de um ponto electrizado será egual á somma da que adquiriria, se não estivesse isolada, com uma camada M tal que seja $V' = \frac{M}{R}$, sendo R o raio da esphera; porque, estando em equilibrio a camada que ella adquire quando não isolada e sendo o seu potencial nullo, a sobreposição d'esta distribuição de electricidade com uma camada homogenea M, que tambem constitue um estado de equilibrio, será um novo estado de equilibrio cujo potencial será a somma dos potenciaes devidos a estas duas distribuições, isto é, V'.

A carga total da esphera será portanto

$$E=(V'-\frac{m}{d})R$$

quando o ponto é externo á esphera e

$$E_1=V'R-m$$

quando é interno, se representarmos por d a distancia do ponto influente ao centro da esphera e por m e R a carga d'este ponto e o raio da esphera.

A densidade n'um certo ponto da esphera será

$$\mu_1=\frac{V'}{4\pi R}+\mu$$

sendo μ a densidade no mesmo ponto quando a esphera não está isolada.

Se o potencial V' da esphera tem o mesmo signal que a carga influente e em valor absoluto $\frac{V'}{4\pi R}$ fica comprehendido entre o maximo e minimo valor de μ, deve haver um systema de pontos sobre a esphera para o qual a densidade é nulla, isto é, uma linha neutra.

Para determinar a posição d'esta linha substituamos na expressão de $\mu_1 \mu$ pelo seu valor; será

$$\mu_1=\frac{V'}{4\pi R}-\frac{d^2-R^2}{4\pi R}\frac{m}{r^3}$$

quando o ponto influente é exterior e

$$\mu_1 = \frac{V'}{4\pi R} + \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \frac{m}{r^3}$$

quando é interior.

Para $\mu = o$ é no primeiro caso

$$r = \left(\frac{d^2 - R^2}{V'} m\right)^{1/3}$$

e no segundo

$$r = \left(\frac{R^2 - d^2}{V'} m\right)^{1/3}$$

o que determina a posição da linha neutra, que evidentemente é uma circumferencia, cujo centro está na linha que une o ponto influente com o centro da esphera.

Se a carga da esphera é nulla é $V' = \frac{m}{R}$ e $r = \left(d\,(d^2 - R^2)\right)^{1/3}$ no primeiro caso e no segundo $r = \left(R(R^2 - d^2)\right)^{1/3}$ o que mostra que o centro da linha neutra fica entre a esphera e o ponto influente.

Quando a esphera está debaixo da influencia de um systema de pontos cujas cargas são $m_1, m_2 \ldots m_n$ collocados a distancias $d_1, d_2 \ldots d_n$ do centro da esphera, o estado de equilibrio será a sobreposição dos devidos á acção isolada de cada ponto, e portanto a sua carga total, quando os pontos influentes são externos a ella, é

$$E=\left(V'-\frac{m_1}{d_1}-\frac{m_2}{d_2}\cdots-\frac{m_n}{d_n}\right)R$$

e

$$E_1=(V'R-m_1-m_2\ldots-m_n)$$

quando são internas.

A densidade n'um determinado ponto é

$$\mu=\frac{V'}{4\pi R}+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n$$

A acção, que um ponto electrizado exerce sobre uma esphera conductora, é a resultante das acções que elle exerce sobre a camada que a esphera adquire quando não isolada e sobre a camada homogenea $V'R$.

A primeira d'estas acções é egual á que exerce sobre a sua imagem electrica e a segunda á que exerceria sobre uma carga $V'R$ concentrada no centro da esphera.

Como estas acções tem a direcção da linha, que une o ponto influente com o centro da esphera, a sua resultante será egual á sua somma, e portanto será

$$F=-\frac{m^2Rd}{(d^2-R^2)^2}+\frac{mV'R}{d^2}\ldots(7)$$

quando o ponto influente é externo á esphera e

$$F=\frac{m^2Rd}{(d^2-R^2)^2}$$

quando é interno.

Da equação (7) conclue-se que a acção de um ponto electrizado exterior a uma esphera é sempre attractiva, quando o segundo termo d'esta expressão é nullo, negativo ou positivo e menor em valor absoluto do que o primeiro, isto é, quando a esphera não está isolada, quando a sua carga é nulla, quando o seu potencial tem signal contrario ao da carga influente ou quando o ponto influente está muito proximo da superficie da esphera.

Se o ponto influente é interno á esphera a acção, que exerce sobre a esphera, será sempre attractiva por ser o signal da expressão (7) independente do signal e valor de m.

Se a esphera está debaixo da influencia de um systema de pontos a acção, que este systema exerce sobre a esphera, é a resultante das que exerceriam todos os pontos se actuassem isoladamente.

Vimos que o producto das distancias ao centro de uma esphera de um ponto electrizado e da sua imagem em relação a esta esphera era egual ao quadrado do raio da esphera.

Os pontos que satisfazem a esta condição denominam-se conjugados por inversão em relação á esphera e o centro da esphera é o centro de inversão.

Quando todos os pontos de um systema são conjugados dos de outro em relação a uma esphera, diz-se egualmente que os dois systemas são conjugados por inversão em relação á mesma esphera.

E' facil vêr que, se C, S e K são os elementos de comprimento, de superficie e de volume de um systema qualquer de pontos, C', S' e K' os correspondentes do systema conjugado d'este por inversão em relação a uma esphera de raio R, λ, σ e ρ as densidades linear, superficial e em volume de um ponto A do primeiro systema, cuja carga e distancia ao centro de inversão são m e d e λ', σ', ρ' as mesmas quantidades que λ, σ e ρ, mas para o ponto A' conjugado de A e cuja distancia ao centro de inversão e d', é

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{K'}{K} = \left(\dfrac{S'}{S}\right)^{3/2} = \left(\dfrac{C'}{C}\right)^{3} \\ \dfrac{d'^3}{d^3} = \dfrac{R^6}{d^3} = \dfrac{d'^3}{R^6} \\ \dfrac{m}{m'} = \dfrac{R}{d} = \dfrac{d'}{R} \\ \dfrac{\rho'}{\rho} = \left(\dfrac{\sigma'}{\sigma}\right)^{5/3} = \left(\dfrac{\lambda'}{\lambda}\right)^{5} = \dfrac{d^5}{R^5} = \dfrac{R^5}{d'^5} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(8)$$

As figuras transformadas por inversão gosam de propriedades geometricas importantes. Aquellas de que nos serviremos, quando applicarmos este methodo de transformação á resolução de alguns casos particulares de equilibrio, são as seguintes.

O angulo de duas superficies ou linhas não fica alterado pela inversão.

Pela inversão uma esphera transforma-se n'outra, um circulo n'outro circulo, excepto quando o centro de inversão é um ponto da superficie da esphera ou um ponto da circumferencia do circulo. Então a esphera transforma-se n'um plano e o circulo n'uma linha.

A relação dos raios de duas espheras ou circulos conjugados em relação a uma esphera é egual á das distancias dos seus centros ao centro de inversão.

Quando por inversão uma esphera se transforma n'um plano a perpendicular a este plano, que passa pelo centro de inversão, tambem passa pelo centro da esphera.

A circumferencia, que passa por um ponto e pelo seu conjugado em relação a uma esphera, corta a esphera em angulo recto.

A applicação da inversão á theoria da electricidade depende do seguinte principio.

Se V é o potencial de uma determinada distribuição de electricidade n'um ponto A e V' o potencial devido á distribuição transformada d'esta em relação a uma esphera de raio R no ponto A', conjugado de A em relação á mesma esphera, é constante a relação de V para V' e é

$$\frac{V'}{V}=\frac{d}{R}=\frac{R}{d'},$$

se d e d' são as distancias de A e A' ao centro de inversão.

Com effeito o potencial da massa m de um ponto da distribuição, cujo potencial é V no ponto A, é $\frac{m}{r}$, sendo r a distancia de m a A, e o da imagem de m no ponto A' é $\frac{mR}{Dr'}$, representando por D a distancia do ponto, cuja carga é m, ao centro de inversão e por r' a distancia da imagem d'aquelle ponto ao ponto A', e portanto é

$$-\frac{mR}{Dr'}:\frac{m}{r}=-\frac{d}{R}=-\frac{R}{d'}$$

por ser $r\,d' = r'\,D$ e $dd' = R^2$
e

$$\frac{V'}{V}=\frac{-\Sigma\dfrac{mR}{D\,r'}}{\Sigma\dfrac{m}{r}}=-\frac{d}{R}=-\frac{R}{d'}$$

Se o ponto A pertence a uma distribuição de electricidade em equilibrio, o ponto A' pertencerá á conjugada de esta e o seu potencial será $V'=-\frac{RV}{d'}$, isto é, para cada ponto varia na razão inversa da distancia d'este ponto ao centro de inversão, e portanto esta camada não estará em equilibrio, mas será a que adquiria um conductor não isolado limitado por esta superficie, se no centro de inversão estivesse uma carga electrica VR, porque então o potencial seria nullo na superficie do conductor e tambem no seu interior por não envolver nenhuma massa electrica a superficie que o limita.

Pela inversão é, pois, possivel conhecendo a distribuição de electricidade em equilibrio sobre uma superficie determinar a que adquire um conductor não isolado limitado pela superficie conjugada d'esta em relação a uma esphera, se fosse influenciada por um ponto electrizado ou, inversamente, determinar a distribuição de electricidade sobre uma superficie, quando se conhece a que adquire um conductor não isolado terminado pela superficie conjugada d'esta em relação a uma esphera influenciada por um ponto electrizado.

Nos paragraphos que se seguem teremos muitas vezes occasião de applicar este methodo.

Influencia de um ponto electrizado sobre dois planos conductores não isolados que fazem entre si um angulo submultiplo de dois rectos. —Seja $\frac{\pi}{n}$ o angulo que fazem entre si dois planos conductores A e B e α o angulo, que faz a perpendicular á aresta do diedro formado por estes planos, e que passa por um ponto influente P cuja carga electrica é m, com o plano A.

O ponto P terá em relação ao plano A uma imagem electrica P' de carga $-m$, esta uma outra P_1 com uma carga m em relação ao plano B, esta ultima uma nova P'' de carga $-m$ em relação ao plano A e assim successivamente.

Do mesmo modo P terá em relação ao plano B uma imagem p' com uma carga $-m$, esta uma nova p_1 com uma carga m em relação ao plano A, etc.

Todas estas imagens estarão sobre uma circumferencia, cujo raio é a distancia d do ponto P á aresta do diedro formado pelos dois planos, e cujo centro é o ponto em que a perpendicular a esta aresta, que passa pelo ponto P, a encontra.

As imagens successivas do mesmo signal P_1, $P_2 \ldots$ P'_1 $P''_1 \ldots$ p_1, $p_2 \ldots$ p'_1 $p_1'' \ldots$ determinam sobre esta circumferencia arcos eguaes a $2\frac{\pi}{n}$, e portanto, se $\frac{\pi}{n}$ é um submultiplo de π, isto é, se n é inteiro, haverá um numero finito de imagens e sobrepor-se-hão os dois systemas que se obtem, quando principiamos considerando a imagem de P em relação a A ou a B, e nenhuma d'estas imagens existirá dentro do angulo formado pelos dois planos.

Se n não é inteiro o numero de imagens é finito.

Quando o numero de imagens é finito é egual a $2n-1$, e os arcos determinados pelas imagens successivas de signal contrario são alternadamente 2α e $2\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)$.

Estas imagens conjunctamente com o ponto P formam um systema symetrico em relação a qualquer dos dois planos, que terá n'estes planos um potencial nullo, e portanto o systema de imagens do ponto P em relação aos dois planos determinará a sua distribuição de electricidade, quando influenciados por uma carga m no ponto P.

Representando por D_1, $D_2 \ldots\ldots$ D', $D'' \ldots\ldots$ d_1, $d_2 \ldots\ldots$ d', $d'' \ldots\ldots$ as distancias de P_1, $P_2 \ldots\ldots$ P', P'', $\ldots\ldots$ p_1, $p_2 \ldots\ldots$ p', $p'' \ldots\ldots$ aos planos em relação a que são imagens, a densidade n'um ponto N do plano A será

$$\mu = -\frac{m}{2\pi}\left\{\frac{D'}{NP'^3} - \frac{d_1}{Np_1^3} + \ldots\ldots\right\}$$

e

$$\mu = -\frac{m}{2\pi}\left\{\frac{d'}{NP'^3} - \frac{D_1}{NP_1^3} \cdots\cdots\right\}$$

quando N pertence ao plano B.

O potencial da camada electrica distribuida sobre os planos no mesmo ponto N será

$$V = -\frac{m}{NP}$$

O raciocinio, que seguimos n'este caso, é uma applicação de um methodo de approximações successivas devido a Murphy e que se póde empregar na resolução de algumas questões de influencia electrica.

Se se pretende estudar a influencia reciproca de dois conductores A e B, sendo A isolado e o seu potencial V e B não isolado, principia-se por este methodo determinando qual seria a distribuição de electricidade que teria A se B não existisse.

Admittindo como uma primeira approximação que esta distribuição é aquella que A tem, quando influenciado por B, determina-se qual seria a $-e_1$ d'este ultimo conductor se fosse influenciado pela carga e de A.

Suppondo que a carga de B é $-e_1$, avalia-se a e_2 que $-e_1$ faz adquirir a A não isolado, depois a $-e_3$ que esta faz adquirir a B e assim successivamente.

E' evidente que uma carga egual a $e + e_2 + \ldots$. distribuida sobre A e uma carga egual a $-(e_1 + e_3 + \ldots)$ distribuida sobre B terão em A um potencial V e em B um potencial nullo.

Ellas são portanto as que os conductores A e B tem, quando A tem um potencial V e B não está isolado.

Se ambos os conductores estão isolados a carga de cada um é a somma da que tem, quando o outro não está isolado, com a que adquire, quando está em communicação com o solo e o outro isolado.

Distribuição da electricidade em duas espheras que se cortam segundo um angulo submultiplo de dois rectos.—Invertendo o systema de dois planos, que acabamos de considerar, em relação a uma esphera de raio R e cujo centro seja o ponto P, os dois planos transformam-se em duas espheras que se cortam segundo um angulo egual ao dos dois planos.

Os pontos conjugados em relação a esta esphera das imagens do ponto P em relação aos dois planos estão todos sobre a linha, que une os centros das duas espheras, e o seu numero será limitado ou indefinido, segundo o angulo das duas espheras fôr ou não submultiplo de dois rectos.

D'estes pontos uns tem cargas do mesmo signal que o da carga de P e outros de signal contrario.

As linhas que unem os primeiros com o centro de inversão fazem com o raio de uma das espheras, que tambem passa por este ponto, angulos eguaes a $\frac{\pi}{n}$, $2\frac{\pi}{n}$, etc.

Estes são tambem os valores dos angulos que as linhas, que partem dos segundos para o mesmo centro de inversão, fazem com a linha que une os centros das duas espheras.

O potencial V' n'um ponto N' d'estas espheras é

$$V' = -V\frac{NP}{R} = \frac{m}{R},$$

representando por V o potencial dos dois planos no ponto N conjugado de N'.

O potencial é, pois, constante e por isso a camada electrica transformada da dos dois planos distribuida sobre estas espheras está em equilibrio.

A densidade n'um certo ponto N' será a somma das densidades correspondentes aos pontos conjugados das imagens do ponto P em relação aos dois planos e que são interiores á esphera em que existe o ponto N', isto é, é

$$\mu = \frac{1}{4\pi a}\frac{m}{R}\left(1 - (a^2 - d_1^2)\frac{D_1}{r_1^3} + \ldots\ldots\right) \ldots\ldots (9)$$

representando por a o raio da esphera, por d_1, $d_2 \ldots$ as distancias dos pontos conjugados das imagens de P em relação aos dois planos ao centro da esphera e por D_1, $D_2 \ldots$ r_1, $r_2 \ldots$ as distancias d'estes mesmos pontos ao centro de inversão e ao ponto N'.

A carga total das duas espheras, cujo potencial V é egual a $\frac{m}{R}$, é

$$V(a - D_1 + D_2 - \ldots\ldots + b) \ldots\ldots\ldots (10)$$

sendo b o raio da outra esphera.

Se quizesssemos estudar a influencia de um ponto sobre duas espheras que se cortam segundo um angulo submultiplo de dois rectos, bastava transformar por inversão em relação a uma esphera um systema de duas espheras que se cortassem segundo o mesmo angulo, tendo uma camada electrica que devia satisfazer ás condições que acabamos de determinar.

Duas espheras que se não interceptam.— Quando duas espheras se não interceptam, as imagens de um ponto comprehendido entre ellas estão todas fóra d'este espaço e portanto póde applicar-se o methodo das imagens electricas a este caso.

Como duas quaesquer espheras, que não são concentricas, se podem sempre transformar n'outras concentricas, basta applicar o methodo das imagens electricas a este ultimo caso, porque os outros se pódem derivar d'este pelo methodo de inversão.

Principiemos, portanto, considerando o caso de duas espheras concentricas.

Um ponto electrizado A comprehendido entre ellas terá uma imagem A_1 em relação á esphera interior, esta uma nova A_2 em relação á esphera externa, esta ultima uma outra A_3 em relação á esphera interna e assim successivamente.

Representando por a e $b = ae^p$ os raios das duas espheras, por $d=ae^u$ a distancia do ponto influente ao centro commum por A_1, A_2... as cargas das imagens é

$$A_1=-Ae^{-u}$$
$$A_2=Ae^p$$
$$A_3=-Ae^{-(u+p)}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2n}=Ae^{np}$$
$$A_{2n+1}=-Ae^{-(u+np)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Do mesmo modo, se principiassemos considerando a imagem a de A em relação á esphera de maior raio, esta teria uma outra imagem a_1 em relação á esphera interior, esta ultima uma nova a_2 em relação á esphera exterior, etc., e seria

$$a_1=-Ae^{p-u}$$
$$a_2=Ae^{-p}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2n-1}=-Ae^{np-u}$$
$$a_{2n}=Ae^{-np}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

As imagens A_1, A_3,... a_2, a_4,... são envolvidas pela esphera interior, as restantes são exteriores á esphera de maior raio.

Para todos os pontos exteriores á esphera de menor raio podemos substituir todas as imagens que esta esphera comprehende por uma carga egual á somma das de todas estas imagens distribuida sobre ella, e portanto será a sua carga

$$E_a = \Sigma a_{2n} + \Sigma A_{2n} + _1 =$$

$$= \frac{A}{e^p - 1} - Ae^{-u} \frac{e^p}{e^p - 1} =$$

$$= -A \frac{a}{d} \frac{b\text{-}d}{b\text{-}a}$$

As imagens A_2, $A_4 \ldots$ a_1, $a_3, \ldots$ formam uma serie divergente e por isso não se póde avaliar o valôr da somma das suas cargas, mas como o potencial devido ao ponto P e a todas as suas imagens é nullo no interior da esphera de menor raio e no exterior da de maior, podemos substituir estas imagens por uma carga egual e de signal contrario á que a superficie de maior raio envolve distribuida sobre ella, e portanto será

$$E_b = -A e^p \frac{1 - e^{-u}}{e^p - 1} = -A \frac{b}{d} \frac{d\text{-}a}{b\text{-}a}$$

a carga da esphera de maior raio.

Se os raios das duas espheras se tornam infinitos ellas transformam-se em dois planos parallelos indefinidos.

As suas cargas serão

$$M_a = -A \frac{d_b}{d}$$

$$M_b = -A \frac{d_a}{d}$$

se d_b e d_a representam as distancias do ponto influente A aos dois planos e d a distancia de um ao outro.

O problema da influencia de um ponto electrizado sobre duas espheras externas uma á outra, quando este ponto é externo a ambas, reduz-se ao da influencia de um ponto sobre duas espheras concentricas, que acabamos de considerar, invertendo o systema das duas primeiras espheras em relação a uma cujo centro seja um dos dois pontos conjugados em relação a ellas.

Pela inversão de duas espheras concentricas em relação a um ponto comprehendido entre ellas póde egualmente reduzir-se o problema da distribuição da electricidade sobre duas espheras externas uma á outra ao da influencia de uma carga electrica concentrada n'este centro de inversão sobre as duas espheras concentricas.

Este ultimo problema, que foi primitivamente resolvido pelo insigne mathematico francez Poisson, foi depois estudado pelo distincto mathematico e physico inglez William Thomson.

Pela applicação do methodo de inversão e do seu methodo das imagens electricas W. Thomson demonstrou que, se E_a e V_a, E_b e V_b são as cargas e os potenciaes de duas espheras externas uma á outra cujos raios são a e b, os valores dos coefficientes q_{aa}, q_{bb} e q_{ab} das expressões

$$E_a = q_{aa} V_a + q_{ab} V_b$$
$$E_b = q_{ab} V_a + q_{bb} V_b$$

são

$$q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3 b^2}{(c^2-b^2)^2 - a^2 c^2} + \ldots\ldots$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2b^2}{c(c^2-a^2-b^2)} - \frac{a^3b^3}{c\left((c^2-a^2-b^2)^2 - a^2b^2\right)} - \ldots\ldots$$

$$q_{bb} = b + \frac{a\,b^2}{c^2-a^2} + \frac{a^2\,b^3}{(c^2-a^2)^2 - b^2c^2} + \ldots\ldots$$

se c representa a distancia dos centros das duas espheras e que a acção de uma esphera sobre a outra é

$$F = -\frac{1}{2}\left\{E_a^2\frac{dp_{aa}}{dc} + 2\,E_a\,E_b\,\frac{dp_{ab}}{dc} + E_b^2\frac{dp_{bb}}{dc}\right\}$$

Duas espheras tangentes uma á outra.—Como duas espheras de raios a e b tangentes uma á outra se podem considerar como o systema de dois planos parallelos a distancias $\frac{1}{2a}$ e $\frac{1}{2b}$ do ponto de tangencia d'estas duas espheras transformado por inversão em relação a uma esphera de raio egual á unidade e cujo centro seja este mesmo ponto, para determinar a carga de um tal systema basta determinar as cargas dos pontos conjugados das imagens em relação aos dois planos de uma carga egual á unidade concentrada no ponto de tangencia, porque a carga de cada esphera será a somma das cargas das imagens que comprehende.

Procedendo assim éra facil ver que é

$$E_a = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{a^2b}{n(a+b)\left(n(a+b) - a\right)}$$

$$E_b = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{ab^2}{n(a+b)\left(n(a+b)-b\right)}$$

representando por E_a e E_b as cargas das duas espheras.

Condensador formado por dois cylindros circulares não concentricos cujos eixos são parallelos.— Se n'um meio isolador indefinido existem duas linhas rectas parallelas electrizadas com cargas eguaes, homogeneas e de signal contrario, as suas superficies equipotenciaes são cylindros circulares não concentricos cujos eixos são parallelos a estas linhas e estão no plano que as contém.

A superficie equipotencial em que o potencial é nullo é um plano parallelo ás duas linhas e equidistante d'ellas.

Uma d'estas linhas é, portanto, a imagem da outra em relação ao plano ou qualquer dos cylindros que são as suas superficies equipotenciaes e, como ellas estão nas mesmas condições que os dois pontos conjugados em relação a uma esphera, era possivel resolver problemas analogos aos que acabamos de resolver em que as espheras seriam substituidas por cylindros e os pontos por linhas rectas, comtudo simplesmente estudaremos o systema formado por duas superficies equipotenciaes.

Em duas das superficies cylindricas equipotenciaes de raios R_1 e R_2 em que o potencial tem os valores V_1 e V_2. podemos, sem alterar o equilibrio, suppor distribuidas as cargas das duas linhas rectas.

Este novo systema constitue um condensador formado de duas armaduras cylindricas, circulares, não concentricas e de eixos parallelos cuja differença de potencial será

$$V_1 - V_2 = 2\,\mu\, l. \frac{R_2\,(R_2^2 - R_1^2 - D^2 + 2dD)}{R_1\,(R_2^2 - R_1^2 + D^2 + 2dD)},$$

representando por μ a densidade electrica de uma das linhas por D metade da distancia de uma á outra e por d a distancia dos centros dos dois cylindros.

A capacidade da parte do condensador comprehendida entre dois planos parallelos perpendiculares aos eixos dos cylindros e que estão a uma distancia E um do outro será

$$C = \frac{1}{2} E\, l.^{-1} \frac{R_2}{R_1} \frac{R_2^2 - R_1^2 - D^2 + 2\,dD}{R_2^2 - R_1^2 + D^2 + 2\,dD}$$

Equilibrio electrico nos casos em que o potencial e a funcção que representa as linhas de força são funcções conjugadas de duas variaveis

Quando se pretende determinar a distribuição da electricidade sobre superficies cylindricas indefinidas cujas generatrizes são parallelas, basta conhecel-a em qualquer secção d'estas superficies feita por um plano perpendicular ás generatrizes, porque será a mesma para todas as secções parallelas a esta.

Então o potencial póde considerar-se como uma funcção só de duas variaveis que representam as coordenadas de qualquer ponto n'um plano perpendicular ás generatrizes.

Como este ha outros casos em que basta considerar só duas dimensões.

O methodo que então se póde seguir para resolver o problema de equilibrio electrico funda-se nas propriedades das funcções conjugadas de duas variaveis que em seguida indicamos.

Se A e B são funcções conjugadas de x e y é, como se sabe,

$$A+B\sqrt{-1}=f(x+y\sqrt{-1}) \ldots\ldots (11)$$

e

$$\frac{dA}{dx}-\frac{dB}{dy}=o \ldots\ldots (12)$$

$$\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dx}=o \ldots\ldots (13)$$

$$\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{d^2A}{dy^2}=o \ldots\ldots (14)$$

$$\frac{d^2B}{dx^2}+\frac{d^2B}{dy^2}=o \ldots\ldots (15)$$

$$\left.\frac{dA}{dx}\right)^2+\left.\frac{dA}{dy}\right)^2=\left.\frac{dB}{dx}\right)^2+\left.\frac{dB}{dy}\right)^2 \ldots\ldots (16)$$

A equação (11) define as funcções conjugadas, as duas equações (12) e (13), que são uma consequencia de (11), são caracteristicas para estas funcções.

As curvas que A e B representam, quando consideramos x e y como coordenadas rectangulares, cortam-se em angulos rectos e é

$$\frac{dA}{ds_2}=\frac{dB}{ds_1}=R \ldots\ldots (17)$$

fazendo

$$R^2=\left.\frac{dA}{dx}\right)^2+\left.\frac{dA}{dy}\right)^2$$

Como as funcções A ou $V = V_1 + C_1 A$, sendo V_1 e C_1 constantes, por satisfazerem á equação (14) pódem representar o potencial, quando só se consideram duas dimensões, as curvas s_1 são linhas equipotenciaes e as s_2 linhas de força.

Quando as linhas equipotenciaes são fechadas pódem considerar-se como superficies de conductores e a quantidade de electricidade distribuida sobre uma parte d'ellas comprehendida entre as linhas de força B_1 e B_2 é $\frac{C_1}{4\pi}(B_2 - B_1)$ se $V_1 + C_1 A_1$, $V_1 + C_1 A_2, \ldots$ representam os potenciaes que lhes correspondem.

Além das propriedades que as equações (12) a (17) exprimem, as funcções conjugadas gosam de outras que muitas vezes se applicam, quando se pretende resolver o problema do equilibrio electrico nos casos em que basta considerar duas dimensões.

São as seguintes:

A somma dos termos correspondentes de n systemas de funcções conjugadas em relação a duas variaveis x e y são duas novas funções tambem conjugadas em relação a x e y.

Duas funcções que são conjugadas em relação a duas outras, que já são conjugadas em relação a duas variaveis x e y, são tambem conjugadas em relação a x e y.

Se V é uma funcção de x_1 e y_1 e x_1 e y_1 são funcções conjugadas de x e y é.

$$\iint \left(\frac{d^2 V}{dx_1^2} + \frac{d^2 V}{dy_1^2}\right) dx_1\, dy_1 = \iint \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2}\right) dx\, dy$$

Das muitas applicações que a theoria das funcções conjugadas tem na theoria do equilibrio electrico apresentaremos simplesmente, como exemplo, duas das mais importantes.

Distribuição da electricidade n'um prato plano infinitamente delgado equidistante de dois planos parallelos indefinidos limitado por um bordo recto.—Se é

$$x_1 = b\,l.\sqrt{x^2+y^2},\ y_1 = b\,arc.\left(tang = \frac{y}{x}\right)$$

e

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) cos.\ \beta,\ y = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) sen.\ \beta$$

são x_1 e y_1 funcções conjugadas de α e β.

Considerando x_1 e y_1 como coordenadas rectangulares, em todas as linhas parallelas ao eixo dos x_1, e para as quaes seja $y_1 = bn\pi$, sendo n um inteiro qualquer, é

$$\beta = n\pi,\quad \alpha = l.\left(e^{\frac{x_1}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x_1}{b}} - 1}\right) \dots \quad (18)$$

quando $x_1 > o$ e, quando $x_1 < o$, é

$$\alpha = o\quad \beta = arc\left(cos. = \frac{x_1}{b}\right)$$

Nas linhas parallelas ao eixo dos x_1 para as quaes é $y_1 = (n + {}^1/_2) b\pi$ é

$$\beta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \alpha = l.\left(e^{\frac{x_1}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x_1}{b}} + 1}\right)$$

Suppondo que β representa o potencial e α a equação des linhas de força podemos considerar β como o potencial de um systema formado por dois planos parallelos indefinidos a uma distancia πb um do outro, tendo um potencial $\frac{1}{2}\pi$, e equidistantes de um prato plano infinitamente delgado perpendicular ao plano dos x_1 y_1, contendo a parte positiva do eixo x, limitado por uma linha recta perpendicular ao mesmo plano dos x_1 y_1 na origem das coordenadas e tendo um potencial o.

A quantidade de electricidade distribuida sobre uma parte do prato que se extende a uma distancia $x_1 = a$ do seu bordo e que tem um comprimento egual á unidade é

$$Q = \frac{1}{4\pi} l. \left(e^{\frac{a}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2a}{b}} - 1} \right)$$

e quando é a muito grande em relação a b é approximadamente

$$Q = \frac{a + b\, l. 2}{4\pi b},$$

isto é, a quantidade de electricidade que tem esta parte do prato, quando limitado por uma linha recta, é maior do que a que tem uma parte egual de um prato indefinido e egual á que teria uma porção d'este ultimo cuja largura fosse $a + b\, l. 2$ e comprimento a unidade.

A densidade em qualquer ponto do prato é

$$\sigma = \frac{1}{4\pi b} \frac{e^{\frac{x_1}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x_1}{b}} - 1}}$$

e nos planos indefinidos

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi b} \frac{e^{\frac{x_1}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x_1}{b}}+1}}$$

Condensador formado de um prato circular plano equidistante de dois outros muito maiores do que elle.—Se o raio R do prato médio de um condensador formado de um prato circular plano equidistante de dois outros muito maiores é muito grande em relação á sua distancia D aos outros, podemos para obter valores approximados considerar o seu bordo como recto e, portanto, será

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{R^2}{D}+\frac{2R}{\pi}l.2\right)$$

a sua capacidade.

A sua densidade quando o seu potencial é nullo e o dos outros é egual a $\frac{1}{2}\pi$ é

$$\sigma = \frac{1}{8D} \frac{e^{\frac{\pi x_1}{2D}}}{\sqrt{e^{\frac{\pi x_1}{D}}-1}}.$$

x_1 é a distancia do bordo ao ponto cuja densidade é σ contada sobre o raio.

Além dos methodos de que acabamos de fallar, na resolução do problema do equilibrio electrico em conductores esphericos ou proximamente esphericos póde empregar-se um outro fundado nas propriedades dos coefficientes de Laplace.

Foi por este meio que Poisson resolveu o problema da distribuição da electricidade n'uma esphera influenciada por um dado systema e em duas espheras externas uma á outra.

Razões que não devemos apresentar aqui obrigaram-nos a mandar imprimir á pressa esta dissertação.

A consequencia d'isto foi passarem-nos desapercebidos muitos erros.

Os principaes são:

PAGINAS	LINHA	AONDE SE LÊ	LEIA-SE
16	15	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{r}$
27	8	-4	-4π
35	11	é $V'=\frac{m}{R}$ e	é $V'=\frac{m}{d}$ no primeiro caso e $V'=\frac{m}{R}$ no segundo e, portanto,
35	13	a esphera	o centro da esphera
42	10	finito	infinito.