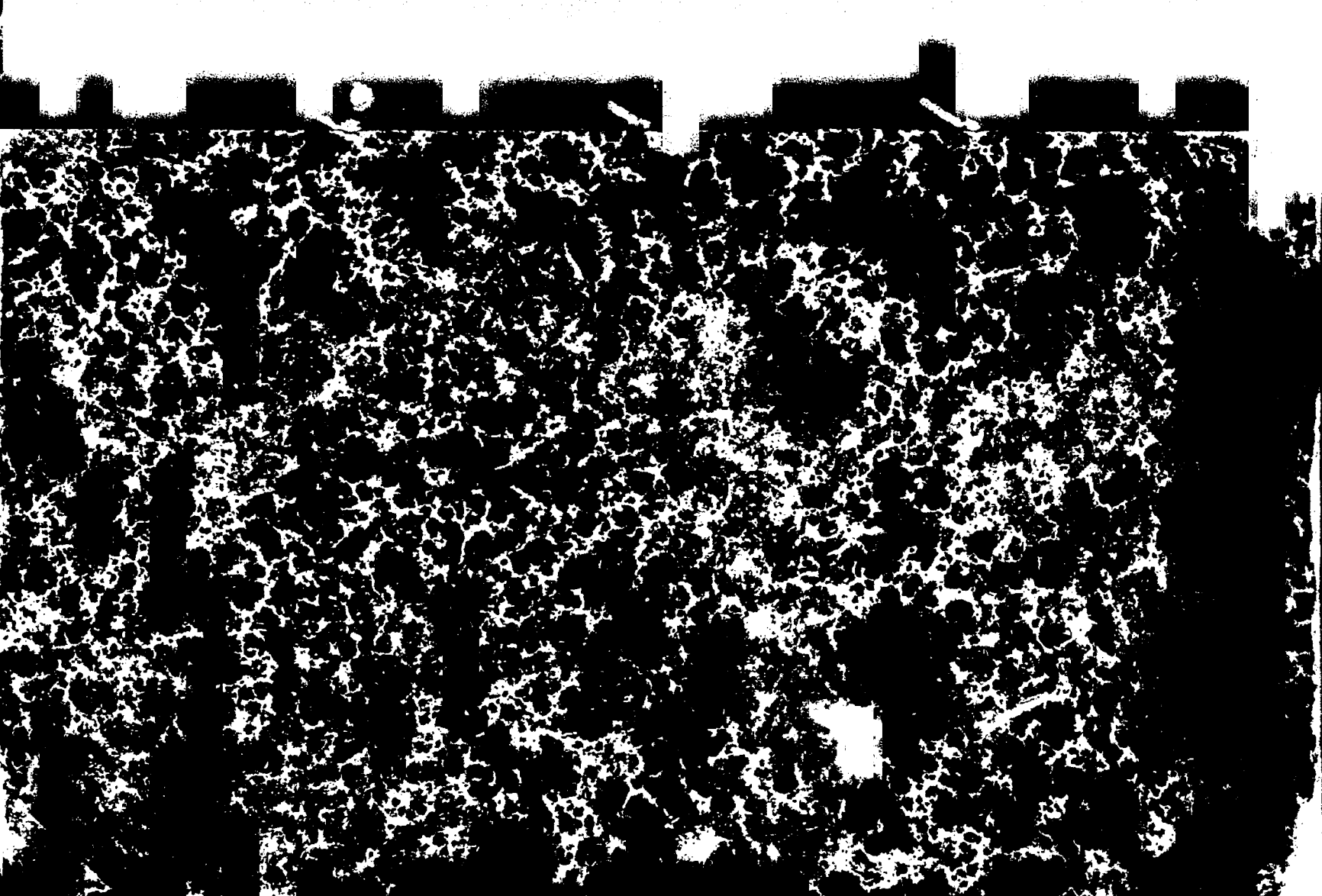


ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNUARIO

DA

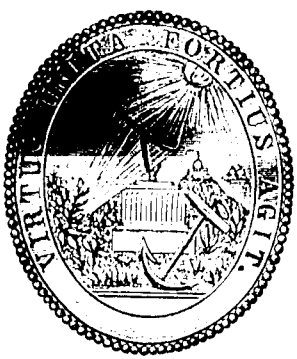
ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1887-1888

(undecimo anno)



PORTO
TYPOGRAPHIA OCCIDENTAL
66—Rua da Fabrica—66
—
1888

RELATORIO DOS FACTOS MAIS IMPORTANTES

QUE TIVERAM LOGAR NA

ACADEMIA POLYTECHNICA

NO ANNO LECTIVO DE 1887-1888

LIDO PELO DIRECTOR DA MESMA ACADEMIA

Na sessão publica de 17 d'outubro de 1887

PELA segunda vez, Senhores, me apresento deante de vós para, em obediencia á lei, vos lêr o relatorio dos factos mais importantes da nossa vida academica, que tiveram logar no anno lectivo que findou; e não mais á vontade me encontro do que no anno anterior, apezar das repetidas provas de benevolencia, que de vós tenho recebido, tanta é a minha falta de dotes oratorios, e tão ingrato é o assumpto de que vou occupar-me.

Referir-me-hei, como no ultimo relatorio, que tive a honra de lêr deante de vós, á frequencia das diversas cadeiras da nossa Academia, ao resultado final dos actos, ao estado dos diversos gabinetes auxiliares do ensino, ás mudanças, que tiveram logar no pessoal docente, e finalmente ás obras do edificio.

FREQUENCIA E RESULTADO DOS ACTOS. — Pela publicação official da Academia — o *Annuario* — sabeis, Senhores, qual o numero de alumnos que frequentaram este estabelecimento scientifico no anno lectivo que findou e a sua distribuição pelas diversas cadeiras. Não vos foi porém ainda annunciado o resultado final dos actos, a que se procedeu no fim d'esse anno lectivo e no principio do presente. Principiarei pois este relatorio por vos enunciar este resultado.

Frequentaram as cadeiras da Academia no anno lectivo findo 242 alumnos abrindo a totalidade de 757 matriculas por cadeiras. No fim do anno lectivo fizeram-se 457 actos que juntos a 27 que tiveram logar n'este mez de outubro prefazem o numero de 484 actos, assim distribuidos pelas diversas cadeiras:

1.ª *cadeira.* — Matricularam-se 42 alumnos, fizeram acto 33, foram approvados 31.

2.ª *cadeira.* — Matricularam-se 23, fizeram acto 13, foram approvados 9.

3.ª *cadeira.* — Matricularam-se 22, fizeram acto 14, foram approvados 12.

4.ª *cadeira* (1.ª parte). — Matricularam-se 26, fizeram acto 9, foram approvados 9.

4.ª *cadeira* (2.ª parte). — Matricularam-se 8, fizeram acto 7, foram approvados 6.

5.ª *cadeira* (1.ª parte). — Matricularam-se 10, fizeram acto 10, foram approvados 10.

5.ª *cadeira* (2.ª parte). — Matricularam-se 6, fizeram acto 5, foram approvados 5.

6.ª *cadeira.* — Matricularam-se 105, fizeram acto 95, foram approvados 72.

7.ª *cadeira*. — Matricularam-se 88, fizeram acto 57, foram approvados 45.

8.ª *cadeira* (1.ª parte). — Matricularam-se 104, fizeram acto 49 e foram approvados 43.

8.ª *cadeira* (2.ª parte). — Matricularam-se 37, fizeram acto 15, foram approvados 12.

9.ª *cadeira*. — Matricularam-se 11, fizeram acto 6, foram approvados 5.

10.ª *cadeira*. — Matricularam-se 89, fizeram acto 59, foram approvados 39.

11.ª *cadeira*. — Matricularam-se 59, fizeram acto 29, foram approvados 26.

12.ª *cadeira*. — Matricularam-se 6, fizeram acto 4, foram approvados 4.

13.ª *cadeira*. — Matricularam-se 7, fizeram acto 7, foram approvados 7.

14.ª *cadeira*. — Matricularam-se 7, fizeram acto 7, foram approvados 6.

15.ª *cadeira*. — Matricularam-se 5, foram approvados 5.

16.ª *cadeira*. — Matricularam-se 14, fizeram acto 9, foram approvados 9.

17.ª *cadeira*. — Matricularam-se 2, fez acto 1, que foi approvado.

18.ª *cadeira*. — Matricularam-se 86, fizeram acto 55, que foram approvados.

Para brevidade junto na lista dos approvados tanto os que foram approvados plenamente como os que o foram approvados *simpliciter*, deixando para o proximo *Annuario* a separação das duas listas, assim como as listas dos que perderam o anno por faltas,

dos que se riscaram da matricula, dos que não obtiveram média sufficiente para ir a acto final; e finalmente a separação dos resultados relativos aos actos feitos em julho, e aos actos feitos em outubro.

Passarei agora a fallar dos gabinetes e estabelecimentos auxiliares do ensino, que a Academia possue, referindo-me porém sómente áquelles que no anno lectivo anterior foram enriquecidos com novos productos.

Bibliotheca. — Durante o anno findo, empregou-se a maior parte da dotação destinada pelo Conselho para a Bibliotheca, á compra de livros relativos á Engenheria, a completar algumas das collecções scientificas mais importantes que a Bibliotheca possuia; e á acquisição de novas collecções scientificas, escolhidas entre as mais notaveis que existem na Europa. Pareceu-me sempre que nada melhor podia fazer-se a favor da Bibliotheca do que enriquecel-a com taes collecções, que pelo seu preço elevado não podem ser facilmente adquiridas pela maior parte dos leitores. No *Annuario* de 1886 a 1887 e no *Annuario* que n'este anno se publicará vereis a lista completa das obras compradas.

Laboratorio chimico. — Por um excellente relatorio que o illustre Director do Laboratorio chimico, sr. Ferreira da Silva, teve a bondade de me dirigir, vê-se que durante o anno lectivo, deu todo o desenvolvimento possivel aos trabalhos práticos, realisando os alumnos no Laboratorio a preparação de alguns

corpos importantes da Chimica organica, que aqui não mencionarei, mas que conhecereis pelo *Annuario* onde este relatorio será publicado.

Realisou tambem este distincto professor deante do Curso, e em seguida, na minha presença e d'alguns professores da Academia, a synthese memoravel da acetylena, que abriu a Berthelot o caminho para a synthese dos corpos organicos.

Com a dotação do Laboratorio foram comprados productos chimicos e reagentes para as preparações e experiencias realisadas, e alguns apparelhos e utensilios, taes como — apparelho gazogenico de Alvergniat, grande exsicador de Dupré, apparelho de Soxhlet para analyse do leite, etc.

GABINETE DE HISTORIA NATURAL. — As acquisições feitas para o gabinete de Mineralogia, Paleontologia e Geologia foram pouco em relação ás necessidades d'este gabinete, mas permittem já poder tentar o ensino da crystalographia com maior desenvolvimento, e iniciar o ensino das applicações do microscopio á lithologia.

Um dos melhores modelos de microscopio de Leiss, um goniometro, alguns mineraes appropriados para o ensino e alguns exemplares de fosseis representam o que de mais importante este anno poude obter o gabinete.

Para o ensino da Geologia e Paleontologia, faltam actualmente quasi todos os recursos. Porisso o illustre Director do gabinete tenciona, com a dotação do presente anno lectivo, principiar a adquirir uma collecção dos fosseis necessarios para este ensino.

Para o gabinete de Zoologia não se fez este anno acquisição alguma, porque os pequenos recursos da Academia não permittem attender no mesmo anno a todos os gabinetes.

Gabinete de cynematica. — Não ha muitos annos ainda, um distincto professor allemão Reuleaux, depois de haver refutado com uma critica das mais finas as antigas theorias das machinas, substituia-lhes uma theoria nova, cheia de originalidade e profundeza, que publicou n'um livro de um alcance philosophico excepcional que, como diz o sr. Tannery, todos os que ensinam a Mecanica theorica e prática devem meditar.

O nosso illustre collega, professor de Mecanica n'esta Academia, fascinado com razão pela doutrina do sabio professor de Berlin, resolveu desde logo introduzil-o no ensino da sua cadeira; e para facilitar aos alumnos a sua comprehensão, fundou um gabinete de modelos dos diversos machinismos empregados por Reuleaux.

No anno lectivo que vem de findar adquiriram-se para este gabinete nove modelos constituindo a série *M* do catalogo de Hoff e Voigt, a qual comprehende os parafusos.

O custo avultado da série seguinte estando fóra das forças do orçamento da Academia, o Conselho, por proposta do sr. Albuquerque, resolveu que se pedisse ao governo a quantia de 1:000$000 reis destinada á compra d'essa série, e á impressão de um catalogo illustrado dos modelos que o gabinete possue.

Na Secretaria não consta ainda qual a intenção do governo a este respeito.

Não terminaremos o que temos a dizer sobre os gabinetes sem declarar que no anno lectivo findo foram postos á disposição da Academia com a melhor vontade pelo sr. Director do Instituto industrial os instrumentos e modelos d'aquelle estabelecimento scientifico. Utilisámos d'este modo a sua bella collecção de modelos da Geometria Descriptiva e a sua pilha de 50 elementos de Bunsen, com a qual o sr. Ferreira da Silva fez a synthese de acetylena de que já fallei.

Tivemos no anno lectivo findo concursos para dous logares, um de lente proprietario na secção de Mathematica, outro de lente substituto na secção da Phylosophia.

Foi despachado para o primeiro logar o sr. Victorino Teixeira Laranjeira, que depois de um curso distincto na Universidade de Coimbra, onde recebeu o gráo de Bacharel em Mathematica, e na Escóla do Exercito de Lisboa, onde frequentou a Engenheria militar, adquiriu nas obras do caminho de ferro do Douro a prática tão necessaria para o magisterio que vae exercer. Foi despachado para o segundo logar o sr. Aarão Ferreira de Lacerda, que acabára de terminar o seu curso na Universidade de Coimbra, adquirindo pelo seu talento e applicação o gráo de Doutor em Phylosophia.

Obras do edificio.—Em virtude da reforma por que passou ultimamente o Instituto industrial do

Porto, reconheceu-se a necessidade de construir um edificio proprio para a collocação d'este estabelecimento de ensino, visto não se julgar a parte do nosso edificio, actualmente occupada por elle, no caso de se adaptar convenientemente ás condições exigidas por essa reforma, em vista da difficuldade de ahi se dispôrem as officinas e as machinas que é necessario montar.

Tendo alguem lembrado como logar appropriado para esta instituição o edificio occupado pela Escola Medico-Cirurgica, e os terrenos visinhos occupados pelo nosso Jardim Botanico, e a conveniencia de transferir a Escola Medico-Cirurgica para o edificio da Academia, de modo a reunir na mesma casa todos os estabelecimentos de ensino superior que existem n'esta cidade, mandou o governo ao Porto uma commissão composta dos srs. Manoel Affonso Espregueira e Conselheiro Madeira Pinto para estudarem este assumpto. Foi esta commissão de parecer que era aceitavel este modo de installar os tres estabelecimentos scientificos, devendo a Escola Medico-Cirurgica occupar metade da ála norte do edificio, isto é, da ála que volta para o lado da praça dos Voluntarios da Rainha, e devendo a Academia occupar a outra metade da ála norte e toda a ála leste do edificio, isto é, a parte que ella e o Instituto industrial actualmente occupam.

Em seguida mandou o governo ouvir a este mesmo respeito os Conselhos da Academia Polytechnica e da Escola Medico-Cirurgica. O Conselho da Academia Polytechnica consultou, por maioria, que achava conveniente a nova disposição que se queria

dar aos tres estabelecimentos, com a condição porém de que primeiro se resolvesse a questão de transferencia, para fóra do edificio da Academia, do collegio dos meninos orphãos de N. Senhora da Graça, visto que, sem esta transferencia, não podia a Academia approveitar convenientemente, por falta de communicações interiores, a parte que recebia pela mudança do Instituto para outro local.

Ao mesmo tempo que estas consultas tinham logar, encarregava o governo o distincto engenheiro, antigo alumno d'esta Academia, sr. Alfredo Soares, de elaborar um plano geral do edificio, de modo a servir para a installação das duas Escolas de instrucção superior do Porto.

Em virtude do que venho de vos dizer, Senhores, intendeu a commissão d'Obras que se não devia continuar as obras a que se estava procedendo no pavimento terreo do edificio, para a construcção de algumas salas para aulas, por constar que esta parte do edificio era alterada no projecto que se estava elaborando; fazendo sómente excepção para uma sala, que julgou não seria alterada por outra disposição que de futuro se quizesse dar ao interior do edificio.

Se no anno lectivo que vae principiar se não poder ainda dar desenvolvimento ás obras para a construcção de salas d'aulas, de que tanta necessidade temos, tenciono propôr á commissão d'Obras e ao governo, que se empregue uma parte da verba destinada ás obras, na reforma da mobilia que a Academia possue, e na compra de alguma mobilia nova, de que ha necessidade para installar os productos que os gabinetes teem adquirido.

Durante as ferias que veem de ter logar foi offerecido á Academia pelo sr. Ascencio de Freitas Pimentel Soromenho um premio destinado ao estudante que mais se distinguisse, no anno lectivo que vem de findar, no curso de Engenheria.

Apraz-me citar aqui esta acção nobre de um portuguez que, nas longinquas regiões da Australia, se não esquece da patria. Actos d'esta natureza que são ha muito frequentes n'outros paizes, principiam, felizmente, tambem a praticar-se entre nós, o que prova quanto se vae comprehendendo qual a influencia que a instrucção tem sobre a civilisação e progresso das nações.

Illustres Academicos a quem me cabe a honra de entregar hoje os diplomas de premio e *accessit* que, pelo vosso talento e applicação, vos foram conferidos pelos vossos mestres!

Duas cousas concorrem principalmente para tornar o homem grande: — o poder intellectual e o trabalho. Por não juntarem ao poder intellectual o amor ao trabalho, muitos espiritos têem passado sem deixar o traço luminoso que da sua intelligencia havia a esperar. Porém o trabalho, nas sciencias, é uma lucta continuada e intensa contra as difficuldades que ellas apresentam a cada passo aos que as cultivam, e se não vencem sem profunda meditação. Para animar o espirito n'esta lucta é necessario ter fé e muita fé. Ter fé em que se ha de vencer a difficuldade que nos atormenta, ter fé na consideração que a sociedade de-

dica aos que sabem, ter fé nas posições elevadas que o estado reserva para os homens illustrados.

Não ha ramo algum do saber humano cuja historia não apresente exemplos frequentes de quanto póde a fé.

Sem a fé não teria Kepler, um d'esses homens raros, como diz Laplace, que a natureza dá de tempos a tempos ás sciencias para d'ellas tirarem as grandes theorias preparadas pelos trabalhos de muitos seculos, sem a fé, digo, não teria Kepler passado 17 longos annos em tentativas continuadas para chegar finalmente, depois de tão longo intervallo de meditação e estudo, á descoberta memoravel das leis que regulam o movimento dos astros.

Sem a fé não teria Saussure, um dos fundadores da geologia, escalado entre mil difficuldades o gigante da Europa, o Monte Branco, para ir no vertice do colosso dos Alpes resolver tantas questões importantes para a sciencia que estava fundando.

Sem a fé não teriam os inventores da machina a vapor luctado com tanta coragem e por tanto tempo contra as difficuldades que a ignorancia oppunha á realisação de tão importante descoberta.

Sem a fé não teria Lesseps conseguido organisar a poderosa companhia que forneceu os meios para levar a effeito a abertura do canal de Suez, nem teria conseguido concluir esta obra colossal, a maior que a engenheria tem até hoje realisado.

Que uma fé viva vos anime pois, jovens academicos, na vossa lucta contra as difficuldades das sciencias, que d'entre vós sairão por certo engenheiros distinctos, medicos illustres e talvez mesmo homens

eminentes que um dia farão progredir as proprias sciencias que hoje estudaes. Que este numero seja grande, é o que vivamente desejo para honra d'esta Academia e interesse da patria.

DISSE

I

Organisação

I

PESSOAL

A — Pessoal do quadro legal da Academia

1. Direcção

Francisco Gomes Teixeira, doutor na faculdade de Mathematica na Universidade de Coimbra, antigo lente da mesma faculdade, socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Costa Cabral, 132.

2. Corpo docente

Francisco de Salles Gomes Cardoso, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra e capitão de mar e guerra.

Mattosinhos—Rua Direita, 20.

Francisco da Silva Cardoso.

Rua da Alegria, 341.

José Joaquim Rodrigues de Freitas, engenheiro civil pela

Academia Polytechnica do Porto, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Travessa de Santa Catharina, 52.

Antonio Alexandre Oliveira Lobo, bacharel formado na faculdade de Direito.

Rua do Principe, 50.

Conde de Campo Bello, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Quinta de Campo Bello (Gaya).

Joaquim de Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, antigo professor no Lyceu Nacional do Porto, etc.

Rua dos Fogueteiros, 1.

Antonio Joaquim Ferreira da Silva, bacharel formado na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, director do Laboratorio Municipal de chimica do Porto, etc.

Rua da Alegria, 923.

José Diogo Arroyo, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, professor do Instituto Industriál e Commercial do Porto.

Martyres da Liberdade, 189.

Manoel da Terra Pereira Vianna, bacharel formado nas faculdades de Mathematica e de Philosophia da Universidade de Coimbra, engenheiro pela Eschola de Pontes

e Estradas de Paris, e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Santa Catharina, 473.

Wenceslau de Sousa Pereira Lima, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, membro do Conselho Superior de Instrucção Publica, e deputado ás côrtes.

Rua de Cedofeita, 137.

Roberto Rodrigues Mendes, bacharel na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, capitão d'estado maior d'engenheria, e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

S. Lazaro, (Hotel America).

Luiz Ignacio Woodouse, bacharel formado em Mathematica pela Universidade de Coimbra e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Rua do Breyner, 118.

Manoel Amandio Gonçalves, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 881.

Duarte Leite Pereira da Silva, bacharel formado em Mathematica e Philosophia pela Universidade de Coimbra.

S. Lazaro, 118.

Manoel Rodrigues de Miranda Junior, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Cedofeita, 468.

*

Victorino Teixeira Laranjeira, bacharel na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, tenente d'estado maior d'engenheria e professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Entreparedes, 28.

Guilherme Antonio Correia, professor do Instituto Industrial e Commercial do Porto.

Martyres da Liberdade, 91.

Aarão Ferreira de Lacerda, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra.

Alegria, 913.

3. Secretaria

Secretario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, bacharel formado em Direito pela Universidade de Coimbra.

Rua das Vallas, 301.

4. Bibliotheca

Bibliothecario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, (interinamente).

5. Jardim Botanico

Guarda, primeiro official do Jardim Botanico.—*Joaquim Casimiro Barbosa*, (interinamente).

Massarellos, 43.

6. Laboratorio Chimico

Guarda-preparador do Laboratorio Chimico.—*Augus-*

to Wenceslau da Silva, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 612.

7. Gabinete de physica

Guarda-demonstrador de physica experimental.—*Vago.*

8. Empregados subalternos

Guarda-mór.—*Joaquim Filippe Coelho*, no edificio da Academia.

Guarda subalterno, servindo de ajudante de bibliothecario.—*José Baptista Mendes Moreira*, Campo Alegre, 173.

Guarda subalterno.—*Antonio Correia da Silva*, no edificio da Academia.

Guarda subalterno.—*Francisco Martins Ferreira Borges*, Ferraria, 139.

Servente do Laboratorio chimico e do gabinete de Physica.—*Domingos Gomes da Cruz*, travessa de S. Dionisio, 99.

Servente da secretaria e porteiro.—*Antonio Teixeira da Costa*, Campo Pequeno, 47.

B—Pessoal não pertencente ao quadro legal

1. Pago pela dotação do expediente e dos estabelecimentos academicos

Amanuense da secretaria.—*Eduardo Lopes*, Travessa de Liceiras, 19.

Hortelão do Jardim Botanico.—*Joaquim José Tavares*, no Jardim.

Servente do Jardim Botanico.—*Alberto Ferreira*, idem.

2. Pagos pela dotação das obras do edificio da Academia e serviço de escripturação e inspecção das mesmas obras

Amanuense da commissão das obras. — *J. Filippe Coelho.*

Guarda apontador das obras.—*Joaquim de Sousa Seabra*, rua 9 de julho, 37.

C — Lentes jubilados

Arnaldo Anselmo Ferreira Braga, do conselho de Sua Magestade e bacharel formado nas faculdades de Medicina e Philosophia da Universidade de Coimbra.

Breyner, 104.

Gustavo Adolpho Gonçalves e Sousa, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, director e professor do Instituto Industrial do Porto.

Principe, 158.

Pedro de Amorim Vianna, bacharel formado na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo professor do lyceu nacional de Lisboa.

Setubal.

Adriano d'Abreu Cardoso Machado, ministro e secretario d'Estado honorario, do conselho de Sua Magestade, dou-

tor na faculdade de Direito da Universidade de Coimbra, antigo lente substituto ordinario da mesma faculdade, e reitor da Universidade de Coimbra.

II

CADEIRAS

1.ª CADEIRA

Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Luiz Ignacio Woodhouse.*

2.ª CADEIRA

Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Dr. Francisco Gomes Teixeira.*

3.ª CADEIRA

Mechanica racional; cinematica.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *Joaquim d'Azeredo Sousa Vieira da Silva Albuquerque.*

4.ª CADEIRA

Geometria descriptiva: — *1.ª parte:* — Geometria descriptiva e projectiva; grapho-estatica.—3 lições semanaes —*2.ª parte:*—Applicações de geometria descriptiva.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Duarte Leite Pereira da Silva.*

5.ª CADEIRA

Astronomia e geodesia: — *1.ª parte:* — Astronomia e geodesia.—3 lições semanaes. — *2.ª parte:*—Topographia. —1 lição semanal. — Vaga. Rege interinamente o lente proprietario da 1.ª cadeira.

6.ª CADEIRA

Physica: — *1.ª parte:* — Physica geral.—3 lições semanaes.—*2.ª parte:*— Physica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Conde de Campo Bello.*

7.ª CADEIRA

Chimica inorganica.—*1.ª parte:*—Chimica inorganica geral.—3 lições semanaes.—*2.ª parte:*—Chimica inorganica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. José Diogo Arroyo.*

8.ª CADEIRA

Chimica organica e analytica: — *1.ª parte:* — Chimica organica geral e biologica.—2 lições semanaes.—*2.ª parte:*—Chimica analytica.—1 lição semanal.—*3.ª parte:*— Chimica organica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Joaquim Ferreira da Silva.*

9.ª CADEIRA

Mineralogia; paleontologia e geologia.—3 lições semanaes.— Lente proprietario *Dr. Wenceslau de Sousa Pereira Lima.*

10.ª CADEIRA

Botanica:—*1.ª parte:*—Botanica.—3 lições semanaes. —*2.ª parte:*—Botanica industrial. Materias primas de ori-

gem vegetal. — 1 lição semanal. — Lente proprietario *Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso.*

11.ª CADEIRA

Zoologia:—*1.ª parte:*—Zoologia.—3 lições semanaes. —*2.ª parte:*—Zoologia industrial. Materias primas de origem animal.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Manoel Amandio Gonçalves.*

12.ª CADEIRA

Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções. Materiaes de construcção. Resistencia dos materiaes. Grapho-estatica applicada. Processos geraes de construcção.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Roberto Rodrigues Mendes.*

13.ª CADEIRA

Hydraulica e machinas, curso biennal.—*1.º anno:*—Hydraulica. Machinas em geral. Machinas hydraulicas.—3 lições semanaes. —*2.º anno:*—Thermodynamica; machinas thermicas. Motores electricos. Machinas diversas. Construcção de machinas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel da Terra Pereira Vianna.*

14.ª CADEIRA

Construcções e vias de communicação, curso biennal. —*1.º anno:*—Edificios. Abastecimento de aguas e esgotos. Hydraulica agricola. Rios e canaes. Portos de mar e pharoes.—3 lições semanaes.—*2.º anno:*—Estradas. Caminhos de ferro. Pontes.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Victorino Teixeira Laranjeira.*

15.ª CADEIRA

Montanistica e docimasia, curso biennal.—*1.º anno.*

—*1.ª parte;*—Docimasia.—1 lição semanal.—*2.ª parte:* —Metallurgia.—2 lições semanaes.—*2.º anno:*—Arte de minas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel Rodrigues de Miranda Junior.*

16.ª CADEIRA

Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação.—*1.ª parte:*—Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial.—2 lições semanaes.—*2.ª parte;*—Economia de legislação e obras publicas, de minas e industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Alexandre Oliveira Lobo.*

17.ª CADEIRA

Commercio, curso biennal.—*1.º anno.*—*1.ª parte:*—Calculo commercial. Escripturação em geral e especialmente dos bancos.—2 lições semanaes.—*2.ª parte:*—Contabilidade industrial.—1 lição semanal.—*2.º anno:*—Economia commercial e geographia commercial.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *José Joaquim Rodrigues de Freitas.*

18.ª CADEIRA

Desenho.—*1.ª parte:*—Desenho de figura, paizagem e ornato.—3 lições semanaes.—*2.ª parte:*—Desenho de architectura e aguadas.—3 lições semanaes.—*3.ª parte:*—Desenho topographico. Desenho de machinas (esboços á vista acompanhados de cótas, para reduzir a desenho geometrico.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Francisco da Silva Cardoso.*

III

Plano dos estudos dos diversos cursos da Academia Polytechnica

(DECRETO DE 10 DE DEZEMBRO DE 1885)

I — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE OBRAS PUBLICAS

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
3.º ANNO	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	
5.º ANNO		
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
30. Construcções I ou II	6	.
23. Projectos de construcções	.	2
25. Projectos de hydraulica e machinas I ou II.	.	6
Exercicios práticos de topographia . . .	.	2
Missões.		
	20	10
	30	

6.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
32. Construcções II ou I.	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial.	2	.
33. Projectos de construcções II ou I . . .	.	6
27. Projectos de machinas II ou I	.	6
Missões.		
	14	12
	26	

II — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE MINAS

1.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
2.º ANNO	**Lições**	**Exercicios**
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II.	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.º ANNO	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24 Hydraulica e machinas I ou II	6	.
37. Montanistica e docimasia I ou II	6	.
25. Projectos de hydraulica e machinas	.	6
38. Projectos de arte de minas	.	6
Exercicios praticos de topographia	.	2
Missões.		
	20	14
	34	

6.º ANNO		
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
34 e 35. Montanistica e docimasia II ou I	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
27. Projectos de metallurgia	.	6
36. Projectos de metallurgia	.	2
36. Exercicios de docimasia	.	2
Missões.		
	14	10
	24	

III — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS INDUSTRIAES

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral.	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
3.º ANNO	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	2	.
14. Chimica organica e biologica	4	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
Chimica prática	.	2
	16	10
	26	
4.º ANNO		
6 Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
20. Zoologia geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas		
	20	4
	24	

	Numero de horas semanaes	
5.º ANNO	Lições	Exercicios
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
13. Chimica inorganica industrial	2	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 6.º)	2	.
28. Projectos relativos a machinas e a chimica industrial	.	6
Missões.		
	18	6
	24	
6.º ANNO		
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
16. Chimica organica industrial	2	.
11. Physica industrial.	2	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 5.º)	2	.
29. Projectos de machinas e de physica e chimica industrial	.	6
Missões.		
	16	6
	22	

IV — CURSO DE COMMERCIO

	Numero de horas semanaes	
1.º ANNO	Lições	Exercicios
10. Physica geral.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
Physica prática, especialmente trabalho com o microscopio.	.	2
Chimica prática	.	2
	12	4
	16	
2.º ANNO		
43. Commercio I ou II	6	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
15. Chimica analytica.	2	.
Chimica prática	.	2
	10	2
	12	
3.º ANNO		
41 e 42. Commercio II ou I.	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial	4	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
47. Analyse chimica commercial.	.	2
	12	2
	14	

*

V — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DO EXERCITO

a. Para officiaes de estado maior e de engenheria militar; e para engenheria civil.

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral.	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
3.º ANNO	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo.	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II.	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	
b. Para officiaes de artilheria.		
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes	
2.º ANNO	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral.	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva. . .	.	2
	16	8
	24	

VI — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA NAVAL

	Numero de horas semanaes	
a. Para officiaes de marinha.	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
10. Physica geral.	6	.
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
	12	4
	16	
b. Para engenheiros constructores navaes.		
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
10. Physica geral	6	.
45. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
Physica prática	.	2
	18	10
	28	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
18. Botanica geral.	6	.
46. Desenho	.	6
	12	6
	18	

VII — CURSO PREPARATORIO PARA AS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
10. Physica geral. Physica prática	6	2
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
20. Zoologia geral.	6	.
18. Botanica geral.	6	.
	30	6
	36	

VIII — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DE PHARMACIA NAS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
18. Botanica geral.	6	-
	18	4
	22	

Condições da admissão dos alumnos

Para a matricula na Academia Polytechnica do Porto é necessario a apresentação das certidões d'approvação em todas as disciplinas de 1.ª, 2.ª e 3.ª classe (secção de sciencias) do curso dos lyceus, e certidão d'approvação em desenho.

Aos alumnos, que até outubro de 1886, inclusivè, obtiveram approvação no 3.º e 4.º anno d'elementos de physica, chimica e historia natural, segundo o regimen de 1880, é dispensada a certidão d'approvação nos exames do 5.º e 6.º anno da mesma disciplina (D. D. de 29 de julho de 1886 e 17 de fevereiro de 1887.)

A matricula é requerida ao director. O requerimento deve ser feito em papel sellado, datado, assignado e documentado nos termos acima referidos, declarando-se n'elle a naturalidade (freguezia e concelho), filiação paterna, idade do requerente e os cursos ou cadeiras em que pretende matricular-se.

Os estudantes admittidos á matricula tem de apresentar no acto da assignatura da matricula a guia do pagamento da propina de 16$502 reis, feito no cofre central do districto do Porto.

Os alumnos militares, que pretendam frequentar os cursos preparatorios para a Escóla do Exercito, precisam requerer ao Ministerio da Guerra a respectiva licença.

Dias e horas das aulas e dos exercicios

1.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
—~~exercicios, 3.as; das 10 ás 12 horas.~~

2.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—~~exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.~~

3.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.

4.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 3.as; das 10 ás 12 horas.
—~~exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.~~

5.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 12 ás 2 horas.

6.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—~~exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.~~

7.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das ~~2 ás 4 horas.~~ 10 ás 12
—~~exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.~~

8.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 8 ás 10 horas.
—~~exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.~~

9.ª Cadeira—aula, ~~2.as, 4.as e 6.as; da 2 ás 4 horas.~~
—~~exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.~~

10.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.

—exercicios, 6.ªs; das 10 ás 12 horas.

11.ª *Cadeira*—aula, 3.ªs, 5.ªs e sabbados; das 2 ás 4 horas.

—exercicios, 5.ªs; das 12 ás 2 horas.

12.ª *Cadeira*—aula, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 2 ás 4 horas.

—exercicios, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 12 ás 2 horas.

13.ª *Cadeira*—aula, 3.ªs, 5.ªs e sabbados; das 2 ás 4 horas.

—exercicios, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 2 ás 4 horas.

14.ª *Cadeira*—aula, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 10 ás 12 horas.

—exercicios, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 2 ás 4 horas.

15.ª *Cadeira*—aula, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 12 ás 2 horas.

—exercicios, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 2 ás 4 horas.

16.ª *Cadeira*—1.ª parte—aula, 3.ªs e 5.ªs; das 10 ás 12 horas.

—2.ª parte—aula, sabbado; das 10 ás 12 horas.

17.ª *Cadeira*—aula, 3.ªs, 5.ªs e sabbados; das 10 ás 12 horas.

18.ª *Cadeira*—aula, 2.ªs, 4.ªs e 6.ªs; das 10 ás 12 horas.

IV

Livros que servem de texto e aconselhados para consulta nas diversas cadeiras, no anno lectivo de 1887-1888

1.ª Cadeira—*Gomes Teixeira (F.)*: Introducção á theoria das funcções.

Carnoy; Curso de geometria analytica.

2.ª Cadeira—*Gomes Teixeira (F.)*: Curso d'analyse infinitesimal. Porto, 1887.

Castro Freire e *Sousa Pinto*: Elementos de calculo differencial e integral—Coimbra.

3.ª Cadeira—*Laurent (H.)*: Traité de mécanique rationelle, á l'usage des candidats á l'Aggregation et á la Licence, 2.me edition, 2 vol. in-8.º Paris, 1877-1878.

4.ª Cadeira—*La Gournerie (Jules de)*: Traité de géométrie descriptive, 2.ème edition, in-4.°, en trois parties; 1.re partie: texte de XIX-143 p. et atlas de 32 planches. Paris, 1880.—2.ème partie: texte de XIX-222 p. et atlas de 32 planches, Paris, 1885. 3.ème partie: texte de XX-230 p. et atlas de 46 planches. Paris, 1885.

5.ª Cadeira—*Faye (H.)*: Cours d'astronomie de l'École Polytechnique, 2 vol. in-8.° Paris, 1881-1883. I. partie: Astronomie sphérique. Description des instruments. Théorie des erreurs. Géodésie et géographie mathématique. 1881. 1 vol. in-8.° de VIII-374 p.—II. partie: Astronomie solaire. Théorie de la lune. Navigation. 1883.

Habets: Topographie.

Calheiros: Apontamentos de geodesia.

6.ª Cadeira—*Jamin (J.)*: Petit traité de physique á l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréats et des candidats aux écoles du gouvernement. Nouveau tirage, augmenté des *Notes sur les progrès récents de la physique*, par M. E. Bouty. 1 vol. in-8.° Paris, 1882.

Ganot (A.): Traité élémentaire de physique. 19.ª edition, entièrement refondue, par George Maneuvrier. 1 vol. in-8.° de 1160 p. contenant 1014 gravures intercalées dans le texte et deux planches en couleur. Paris, 1884.

7.ª e 8.ª Cadeiras—Agenda du chimiste à l'usage des ingénieurs, physiciens, chimistes, etc. Paris, librairie Hachette, ultima edição.

Berthelot (M.): Traité élémentaire de chimie inorganique, 2.ème edition, avec la collaboration de Jungfleisch. 2. vol. in-8.° de XX-483 pag. e XV-489 pag. Paris, 1880.

Lapa (J. I. Ferreira): Technologia rural ou artes chimicas agricolo-florestaes. 1.ª parte: Productos fermentados. 3.ª edição. 1 vol. in-8.° de 374 p. Lisboa, 1885. 2.ª

parte: Azeites, lacticinios, cereaes, farinhas, pão e féculas. 2.ª edição. 1 vol. in-8.º de 221 pag. Lisboa, 1875. 3.ª parte: Productos saccharinos, florestaes, textis, animaes e salinos. 1 vol. in-8.º Lisboa.

Payen (A.): Précis de chimie industrielle, à l'usage: 1.º des écoles d'arts et manufactures et des arts et métiers; 2.º des écoles préparatoires aux professions industrielles; 3.º des fabricants et des agriculteurs; 6.me édition, revue et mise au courant des dernières découvertes scientifiques, par Camille Vincent, 2 tom. in-8.º de 882 e 1:014 pag. et 1 atlas de XLIV planches. Paris, 1877-78.

Silva (A. J. Ferreira da): Tratado de chimica elementar. 1. Chimica mineral. 1 vol. in-8. de XV-580 p. Porto, 1883.

Debraye: Cours élémentaire de chimie, 2 vol.

9.ª Cadeira—*Lapparent (A. de)*: Cours de minéralogie. 1 vol. in-8.º de XII-560 pag. avec 319 gravures dans le texte et une planche chromo-lithographiée. Paris, 1884.

Gonçalves Guimarães (Dr. A. J.): Tratado elementar de mineralogia. Principios geraes. Porto, 1883. 1 vol. in-8.º de 239 pag. e atlas de XXII est.

10.ª Cadeira—*Lanessan (J. L. de)*: Manuel de histoire naturelle médicale.

Henriques (Julio): Terminologia botanica.

Bonnier et Layens: Nouvelle flore pour la détermination facile des plantes. Paris.

11.ª Cadeira—*Lanessan (J. L. de)*: Manuel de histoire naturelle médicale.

12.ª Cadeira—*Flamant*: Stabilité des constructions et résistance des matériaux. 1886. (Baudry).

13.ª Cadeira—~~*Callignon*: Cours de mécanique, appliquée aux constructions~~.

14.ª Cadeira—*Durand-Claye* (*Ch. L.*) et *L. Marx*: Routes et chemins vicinaux.

Debauve: Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées.

15.ª cadeira—*Balling*: Guide pour l'essai des minerals des produits metallurgiques et des combustibles. Paris 1881.

Corradi (*D. Luiz Barinaga y*): Curso de metallurgia especial.

Hilipp's (*J. A.*): Elements of metallurgy.

16.ª Cadeira—*Rodrigues de Freitas* (*J. J.*): Principios de economia politica.

Codigo administrativo.

Codigo Commercial Portuguez.

17.ª Cadeira—*Léfevre*: La comptabilité.

Pereire: Tables de l'intérêt composé des annuités et des rents viagères.

Estabelecimentos da Academia

I. — Bibliotheca

1. Sobre a historia e desenvolvimento d'este estabelecimento veja-se:

Memoria historica da Academia Polytechnica do Porto, pelo conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado, no *Annuario* de 1877-1878, pag. 206, 208-210, 225 e 226.

Catalogo da Bibliotheca da Academia Polytechnica do Porto; 1.ª parte. Catalogo dos livros de Mathematica e de Philosophia natural. Porto, 1883; *Annuario* de 1878-1879, pag. 29-37; *Annuario* de 1879-1880, pag. 33 a 41; *Annuario* de 1880-1881, pag. 45-54; *Annuario* de 1881-

1882, pag. 55-82; *Annuario* de 1882-1883, pag. 167-195; *Annuario* de 1883-1884, pag. 100-116; *Annuario* de 1884-1885, pag. 48-57; *Annuario* de 1886-1887, pag. 48-60.

II. — Gabinete de historia natural

Sobre este gabinete veja-se: *Annuario* de 1878-1879, pag. 39-41, e *Annuario* 1886-1887, pag. 60.

III. — Gabinete de machinas e de physica

Sobre este gabinete veja-se o *Annuario* de 1884-1885, pag. 57.

IV. — Laboratorio chimico

1.—Sobre este laboratorio veja-se: *Annuario* de 1878-1879, pag. 45-59, *Annuario* de 1879-1880, pag. 47-57, *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-57, *Annuario* de 1881-1882, pag. 83-97, *Annuario* de 1882-1883, pag. 143-162, *Annuario* de 1883-1884, pag. 117-203, *Annuario* de 1884-1885, pag. 58-59, *Annuario* de 1886-1887, pag. 61-65.

2.—Relatorio do director do laboratorio

Ill.mo Ex.mo Snr.

Tenho a honra de enviar a V. Ex.ª um succinto relatorio dos trabalhos academicos realisados no anno lectivo findo de 1886-1887, na cadeira de chimica organica e analytica, a meu cargo.

A regencia dos dous cursos fez-se com sufficiente regularidade. O programma das lições foi o que apresentei ao Conselho em Julho de 1886 e que foi approvado pelo Conselho Superior de Instrucção Publica.

No curso de chimica organica foram estudadas com o de-

vido desenvolvimento as principaes materias constantes do programma, abrangendo as generalidades, os hydrocarbonetos, os alcooes, os aldehydes e os acidos organicos. As outras partes do programma foram mais rapidamente percorridas por falta de tempo.

No curso de chimica analytica foram mais aprofundadas as duas primeiras partes do programma—preliminares e analyse mineral qualitativa, dando eu particular importancia ao estudo dos methodos geraes de separação e reconhecimento dos acidos e das bases no caso mais complexo de uma mistura de saes mineraes. As outras tres partes do programma, versando sobre analyse mineral, quantitativa, analyse dos gazes e analyses especiaes, só poderam ser mui rapidamente esboçadas.

Parece reconhecer-se que uma só lição por semana para o desenvolvimento sufficiente de todas as partes do programma de chimica analytica, é insufficiente. E comtudo ninguem desconhece os grandissimos subsidios que a analyse chimica hoje fornece para a resolução d'um grande numero de problemas que interessam as mais importantes forças vivas d'uma nação. Se a experiencia de mais este anno lectivo me mostrar a impossibilidade de dar áquelle estudo o desenvolvimento que elle merece, proporei a V. Ex.ª e ao Conselho academico as providencias que julgar mais acertadas.

Os trabalhos práticos realisados no Laboratorio pelos alumnos, que foram distribuidos em turmas, versaram sobre a preparação d'alguns corpos importantes da chimica organica. Entre estes mencionaremos, no grupo dos hydrocarbonetos, os que se referem á formena, ao chloroformio e ao iodoformio, á ethylena e chloreto e brometo de ethylena, á acetylena, á terebinthena e seus chlorhydratos, á benzina e nitrobenzina, e á naphtalina. A proposito dos alcooes foram praticadas preparações relativas ao alcool absoluto, á glycerina e mannita, á glucose, ao assucar invertido; ao phenol ordinario e ao acido picrico. Dos acidos organicos prepararam-se os acidos formico, benzoico e oxalico. Foi tambem objecto d'um trabalho a formação da importante base organica, pon-

to de partida para a preparação d'essa immensidade de côres artificiaes que a industria hoje aproveita em larga escala para a impressão nos tecidos — quero fallar da anilina obtida por meio da benzina, por intermedio da nitrobenzina.

Além d'estes trabalhos e de um certo numero de demonstrações durante as lições, tambem realisei, perante o curso, a importante synthese total da acetylena, que abriu a Berthelot o caminho para a synthese dos corpos organicos, a partir dos elementos. A experiencia foi realisada em 22 de Dezembro do anno findo, tendo-me V. Ex.ª feito a honra de assistir á realisação d'ella e alguns meus collegas. É uma experiencia que não póde facilmente repetir-se, se attendermos aos meios de que é necessario lançar mão. Como se sabe, consiste ella em provocar a combinação directa do hydrogenio e do carbono por influencia do arco voltaico.

No curso de chimica analytica fiz a demonstração da principal parte dos apparelhos em uso nos laboratorios e realisei perante o curso numerosas experiencias demonstrativas. O numero de sessões de trabalho no Laboratorio não podia ser muito elevado, visto que por emquanto o Conselho apenas lhe destina um turno por semana. Alguns, mas poucos, alumnos sollicitaram de mim permissão para estudarem no Laboratorio além dos dias que lhe cabiam por turno. Dous d'esses alumnos, Annibal Augusto Trigo e Alfredo Augusto Lisboa de Lima, que foram laureados pelo Conselho, merecem louvores pela assiduidade, applicação e cuidado de que deram provas n'estes trabalhos, em que eram guiados pelo preparador do Laboratorio.

Com a dotação do Laboratorio foram compradas obras de chimica para o Laboratorio, diversos productos chimicos e reagentes, e alguns apparelhos e utensilios, entre os quaes mencionarei — o apparelho gazogenico d'Alverguiat, campanas para vacuo, grande exsiccador de Dupré, apparelho de Soxhlet para analyse do leite, reguladores de temperatura, etc. As mezas para trabalho dos alumnos foram reformadas, ficando mais commodas para o trabalho.

Deus guarde V. Ex.ª Porto, 11 de Outubro de 1887.

Ill.mo Ex.mo Snr. Director da Academia Polytechnica do Porto.

A. J. Ferreira da Silva.

V. — Jardim Botanico

1. — Sobre este jardim veja-se: *Annuario* de 1877-1878, pag. 29-30; *Annuario* de 1878-1879, pag. 51-56; *Annuario* de 1879-1880, pag. 44-45 e 230, *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-57, *Annuario* de 1881-1882, pag. 99-113, *Annuario* de 1882-1883, pag. 136-142, *Annuario* de 1883-1884, pag. 203-247.

VI. — Observatorio Astronomico

Veja-se a *Memoria historica* do conselheiro Adriano Machado, já citada, *Annuario* de 1877-1878, pag. 207 e 223, *Annuario* de 1886-1887, pag. 66. Conserva-se, ainda hoje, imprestravel para observações.

VII. — Gabinete de Cinematica (Systema Reuleaux)

Sobre este gabinete veja-se: *Annuario* de 1878-1879, pag. 59, *Annuario* de 1881-1882, pag. 115-120, *Annuario* de 1884-1885, pag. 61 e 62 e *Annuario* de 1886-1887, pag. 66-67.

II

Estatistica

LISTA ALPHABETICA DOS ALUMNOS DA ACADEMIA

indicando a sua filiação, naturalidade, e as cadeiras em que se matricularam

1—Abel Brandão Leite Pereira Cardoso de Menezes, filho de Antonio Brandão de Andrade da Cunha e Lima, natural de S. Thomé de Covellos, concelho de Baião—6.ª cadeira (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

2—Abilio Ribeiro de Miranda, filho de Joaquim Correia de Miranda, natural de Santo Thyrso—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), e 18.ª (2.ª parte);

3—Accacio Umbelino Pereira da Silva, filho de Eduardo Augusto Pereira Barbosa, natural de Santa Eulalia, concelho de Paços de Ferreira—6.ª (1.ª parte), e 7.ª (1.ª parte);

4—Adolpho Pinto Monteiro da Cruz, filho de Antonio Alves Pinto da Cruz, natural de Rio Preto (Brazil)—6.ª (1.ª parte), e 7.ª (1.ª parte);

5—Affonso da Silveira Machado Vasconcellos Castello Branco, filho de João da Silveira Machado Castello Branco, natural de Vizeu—1.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

6—Albano Annibal de Barros, filho de Francisco Augusto de Barros, natural de Bragança—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

7—Albano Augusto d'Oliveira, filho de Delfina da Rocha Oliveira, natural de Recarei, concelho de Paredes—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

8—Albano Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego—1.ª, 6.ª (1.ª parte), e 18.ª (1.ª parte);

9—Alberto Alvaro d'Armada, filho de Joaquim Alvaro d'Armada, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—10.ª (1.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

10—Alberto Augusto Gomes d'Almeida, filho de José Gomes d'Almeida, natural de Castellões, concelho de Cambra—11.ª (1.ª parte);

11—Alberto Barbosa de Queiroz, filho de Antonio Barbosa de Queiroz, natural de Ancêde, concelho de Baião—1.ª e 11.ª (1.ª parte);

12—Alberto Ortigão de Miranda, filho de João Baptista de Miranda, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

13—Alberto Vieira Gomes, filho de Manoel Joaquim Gomes, natural de Braga—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 18.ª (2.ª parte);

14—Alexandre Carneiro Geraldes da Silva Moreira, filho de José Carneiro Geraldes da Silva Moreira, natural do Marco de Canavezes—4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª parte);

15—Alfredo Araujo d'Almeida Campos, filho de Antonio d'Almeida Querido, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

16—Alfredo Arthur Lopes Navarro, filho de Antonio José Lopes Navarro, natural de Coimbra—1.ª;

17—Alfredo Augusto Lisboa de Lima, filho de José Maria de Lima, natural de Lamego—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

18—Alfredo da Costa Rodrigues, filho de Antonio da Costa Rodrigues, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

19—Alfredo da Silva Reis, filho de João José da Silva, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

20—Alfredo Simões Ramos, filho de José Ramos de Proença Saraiva, natural do Souto da Casa, concelho de Fundão—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

21—Alfredo de Sousa Azevedo, filho de João Baptista de Sousa Azevedo, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

22—Alvaro Alves Moreira Coelho, filho de José Joaquim Moreira Coelho, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte), e 18.ª (1.ª parte);

23—Alvaro Augusto Ferreira Pipa, filho de Joaquim José da Silva Pipa, natural de Braga—7.ª, (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

24—Alvaro Aurelio de Sousa Rego, filho de José Maria Rego, natural do Porto—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte) e 9.ª;

25—Alvaro d'Azevedo Albuquerque, filho de Joaquim de Sousa Azevedo Vieira da Silva Albuquerque, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

26—Annibal Augusto da Silva, filho de José Joaquim Fernandes da Silva, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

27—Annibal Augusto Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

28—Annibal Lopes Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

29—Antonio d'Almeida Moraes Pessanha, filho de José Pereira da Silva e Castro, natural de Passos, concelho de Sabrosa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

30—Antonio Amorim Pires Toste, filho de Joaquim Augusto Pires Toste, natural de Angra do Heroismo (Açores)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

31—Antonio Arnaldo Taveira, filho de José Januario Taveira Cardoso, natural de Sande, concelho de Lamego—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

32—Antonio Augusto d'Abreu e Silva Lapa, filho de José Antonio Pereira da Silva Lapa, natural de Lamego—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

33—Antonio Augusto da Rocha Peixoto, filho de Antonio Luiz da Rocha Peixoto, natural da Povoa de Varzim—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

34—Antonio Correia de Magalhães Ribeiro Junior, filho de Antonio Correia de Magalhães Ribeiro, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

35—Antonio Duarte Pereira da Silva, filho de José Duarte Pereira, natural de S. Miguel do Bairro, concelho de Castello de Paiva—1.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª e 17.ª;

36—Antonio Evaristo de Moraes Rocha, filho de João Evaristo da Rocha, natural de Chaves—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

37—Antonio Geraldo da Cunha, filho de José da Cunha Alves de Sousa, natural de Braga—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

38—Antonio Gomes Duarte, filho de José Antonio Gomes Duarte, natural de Pinheiro, concelho d'Aguiar de Sousa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

39—Antonio José de Lima, filho de José Antonio de Lima, natural de Pereiro, concelho de Barcellos—1.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte) e 9.ª

40—Antonio José da Motta Campos Junior, filho de Antonio José da Motta Campos, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

41—Antonio Julio Ferreira de Barros, filho de Sabino Ferreira de Barros, natural de Murça—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

42—Antonio Lopes Baptista, filho de João Lopes Baptista, natural do Porto—2.ª, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

43—Antonio Luiz Soares Duarte, filho de Manoel Francisco Duarte, natural do Porto—4.ª (1.ª parte);

44—Antonio Manoel Botelho, filho de Francisco de Paula Botelho, natural de Belem—2.ª, 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

45—Antonio Martins Delgado, filho de João Martins Delgado, natural de Perre, concelho de Vianna do Castello—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

46—Antonio Moreira Beato, filho de Joaquim Antonio Beato, natural de Souzel, districto de Portalegre—6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

47—Antonio Pedro Saraiva, filho de José Pedro Saraiva, natural de Villa Nova de Foz-Côa—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

48—Antonio Pinto d'Albuquerque Stockler, filho de Luiz d'Albuquerque do Amaral Cardoso, natural de Ceia—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

49—Antonio Pinto de Sampaio e Mello, filho de Antonio Pinto da Cunha e Sousa, natural de Arcos de Baulhe, concelho de Cabeceiras de Basto—1.ª, 7.ª (1.ª parte);

50—Antonio Rigaud Nogueira, filho de Francisco Rodrigues Nogueira, natural da Bahia (Brazil)—5.ª (2.ª parte), 9.ª, 12.ª, 13.ª (2.ª parte) e 14.ª (2.ª parte);

51—Antonio de Sousa Monteiro, filho de Manoel Monteiro, natural de Leiria—13.ª (2.ª parte), 14.ª (2.ª parte), 15.ª e 16.ª (2.ª parte);

52—Antonio Thomaz Ferreira Cardoso, filho de Antonio Joaquim Santiago, natural d'Oliveira d'Azemeis—4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

53—Antonio Villela Areias Junior, filho de Antonio Villela Areias, natural da Povoa de Lanhoso—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

54—Antonio Xavier Gomes dos Santos, filho de Antonio Gomes dos Santos, natural de S. Miguel do Souto, concelho da Villa da Feira—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 9.ª

55—Armando da Cunha Azevedo, filho de José Marques d'Azevedo, natural de Aveiro—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

56—Armindo Augusto Girão Guimarães, filho de José Antonio Guimarães, natural de Vizeu—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

57—Arnaldo Arthur Ferreira Braga, filho de Arthur Aureliano Ferreira Braga, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

58—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira, filho de João Antonio Lourenço Gomes Ferreira, natural de Villarinho de Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães—11.ª (1.ª parte);

59—Arnaldo José Claro, filho de Sebastião José Claro, natural de Villa Real—6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

60—Arnaldo de Mattos Cardoso Pereira, filho de Luiz Cardoso Pereira, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

61—Arthur Augusto d'Albuquerque Seabra, filho de Armando Arthur Ferreira de Seabra da Motta e Silva, natural do Porto—4.ª (1.ª parte) e 9.ª;

62—Arthur Hygino Soares, filho de José Victorino Soares, natural d'Angra do Heroismo (Açôres)—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

63—Arthur Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego—13.ª, 14.ª, 15.ª e 16.ª (2.ª parte);

64—Arthur Pinto Malheiro, filho de Manoel Pinto Malheiro, natural do Porto—1.ª, 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

65—Arthur Vieira de Castro, filho de José Antonio Vieira de Castro, natural de Santa Eulalia, concelho de Fafe—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

66—Augusto Guedes da Silva, filho de Clemente Guedes da Silva, natural de Crestuma, concelho de Villa Nova de Gaya—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

67—Augusto Maria Soares, filho de João Lourenço d'Almeida Soares, natural de Valença—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

68—Augusto de Miranda, filho de Januario de Miranda, natural de Torres Vedras—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

69—Augusto Pereira Nobre, filho de José Pereira Nobre, natural do Porto—9.ª e 11.ª (1.ª parte);

70—Bellarmino Baptista Vasconcellos, filho de Antonio Soares Moreira Vasconcellos, natural de Cepellos, concelho de Amarante—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

71—Bernardo José Borges, filho de Manoel José Borges, natural da Regoa—11.ª (1.ª parte);

72—Candido Frias Sampaio e Mello, filho de Antonio Pinto da Cunha e Sousa, natural de S. Braz do Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

73—Carlos Alberto Vianna Pedreira, filho de Joaquim Maria Pedreira, natural de Vianna—2.ª, 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

74—Carlos Augusto Affalo Carneiro Geraldes, filho de José Carneiro Geraldes, natural do Porto—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

75—Carlos Augusto Teixeira Babo, filho de José Joaquim Teixeira Babo, natural de Figueiró, concelho d'Amarante—11.ª (1.ª parte);

76—Carlos Fernando Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—2.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

77—Carlos Henrique Coisne, filho de Pedro Francisco José Coisne, natural de Steeniverk (França)—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

78—Carlos Henrique da Silva Maia Pinto, filho de Henrique Pinto, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

79—Carlos José Gomes Brandão, filho de José Antonio Gomes Brandão, natural do Rio de Janeiro—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

80—Carlos de Sampaio Gonçalves, filho de Joaquim José Gonçalves, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

81—Casimiro Antonio d'Oliveira, filho de Francisco José d'Oliveira, natural de Mosteiró, concelho de Vieira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

82—Casimiro Jeronymo de Faria, filho de Jeronymo Domingos de Faria, natural de Galafura, concelho da Regoa—5.ª (1.ª parte) e 9.ª

83—Cesar Augusto Gonçalves da Costa Lima, filho de Francisco Gonçalves da Costa Lima, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

84—Christovão Teixeira Machado, filho de Francisco Teixeira Machado, natural do Rio de Janeiro—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

85—Clemente Joaquim dos Santos Pinto Junior, filho de Clemente Joaquim dos Santos Pinto, natural de Carrazeda do Montenegro, concelho de Valpassos—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

86—Custodio José Ribeiro, filho de José Maria Ribeiro, natural de Christello, concelho de Valença—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

87—Custodio Martins Henriques, filho de Joaquim Martins Henriques, natural de Pecegueiro, concelho de Sever do Vouga—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

88—Diniz Fernandes Neves, filho de Antonio Thomaz das Neves, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

89—Eduardo Alfredo de Sousa, filho de João José de Sousa, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

90—Eduardo Augusto Soares de Freitas, filho de Antonio Joaquim de Freitas, natural de Villa Cova da Lixa—6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

91—Eduardo Gonçalves de Mattos, filho de José Gonçalves de Mattos, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

92—Eduardo de Moura, filho de Francisco Antonio Marques de Moura, natural d'Ilhavo—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

93—Eduardo Nunes d'Oliveira, filho de Manoel Nunes Cancella, natural de Figueiró dos Vinhos—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

94—Eduardo de Sousa Monteiro Maia, filho de Henrique Anthero de Sousa Maia, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

95—Eduardo Teixeira Leite, filho de Antonio Teixeira Leite, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—4.ª (1.ª parte), 9.ª, 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

96—Eduino Rocha, filho de Justino Augusto Rocha, natural da Horta (Ilha do Fayal)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

97—Eleuterio Adolfo Moreira da Fonseca, filho de Manoel Eleuterio Moreira da Fonseca, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

98—Elysio Leitão Vieira dos Santos, filho de Joaquim Vieira dos Santos, natural do Porto—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

99—Ernesto Eugenio Alves de Sousa Junior, filho de Ernesto Eugenio Alves de Souza, natural do Porto—13.ª (2.ª parte), 14.ª (2.ª parte) e 16.ª (2.ª parte);

100—Fernando José d'Almeida, filho de Francisco José d'Almeida, natural de S. Pedro do Sul—11.ª (1.ª parte);

101—Fernando Moutinho, filho de Joaquim Ferreira Moutinho, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

102—Filippe de Sousa Carneiro Canavarro, filho de Cypriano de Sousa Carneiro Canavarro, natural da Regoa—12.ª, 13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 15.ª (1.º anno) a 16.ª (2.ª parte);

103—Flavio Augusto Marinho Paes, filho de Carlos Augusto Paes, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

104—Flavio Moreira da Fonseca, filho de Miguel Moreira da Fonseca, natural de Lamego—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

105—Flavio Norberto de Barros, filho de Manoel Antonio de Barros, natural de Valença—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

106—Fortunato d'Azevedo Varella, filho de Antonio José d'Azevedo Varella, natural de Santa Maria d'Infias, concelho de Guimarães—11.ª (1.ª parte);

107—Francisco Antonio Bayão Taquenho, filho de Francisco Joaquim Gomes Taquenho, natural de Cuba—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

108—Francisco Antonio Lopes, filho de Antonio Joaquim Lopes, natural de Azenhas, concelho de Mogadouro—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

109—Francisco Araujo de Castro Coutinho, filho de Francisco José d'Araujo, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

110—Francisco Emilio de Carvalho Pinheiro, filho de D. Emilia do Carmo d'Oliveira Carvalho, natural d'Alter do Chão—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

111—Francisco Ferreira Figueiredo Leitão, filho de José Ferreira Figueiredo Leitão, natural de Santa Eulalia de Besteiros—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

112—Francisco Forbes de Bessa, filho de Joaquim de Bessa Pinto, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

113—Francisco Ignacio Párra, filho de Simão Antonio Párra, natural d'Urros, concelho de Mogadouro—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

114—Francisco Pereira Vianna, filho de João Pereira Vianna, natural de Vianna do Castello—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

115—Francisco de Pina Vaz, filho de Jacintho de Pina Vaz, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

116—Francisco de Resende, filho de Francisco Antonio de Resende Junior, natural d'Aveiro—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

117—Frederico Leite Pereira de Mello, filho de José Leite Pereira de Mello, natural de Penafiel—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

118—Gregorio Correia Pinto Rolla, filho de Simplicio Arlindo Correia Rolla, natural da Regoa—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

119—Guilherme Maria Rodrigues Bello, filho de Antonio Moreira Bello, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

120—Guilherme Teixeira de Sousa e Silva Alcoforado, filho de Duarte Teixeira de Sousa e Silva Alcoforado, natural de Guimarães—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

121—Guilhermina de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

122—Heitor Correia da Silva Sampaio, filho de João Correia da Silva Sampaio, natural de Braga—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

123—Henrique Carlos Rodrigues, filho de Antonio Francisco Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

124—Henrique Guedes de Vasconcellos, filho de José Vasconcellos Noronha e Menezes, natural de Lamego—1.ª, 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

125—Henrique José Martins Ferreira, filho de Antonio José Martins Ferreira, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

126—Herculano de Mattos Sarmento de Beja, filho de Antonio Augusto de Mattos Sarmento de Beja, natural de Coimbra—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

127—Horacio Dias Peixoto, filho de Joaquim Dias Peixoto, natural de S. Bartholomeu do Rego, concelho de Celorico de Basto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

128—Hugo de Noronha, filho de Tito Augusto Duarte de Noronha, natural d'Ovar—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

129—Ignacio Pinto d'Oliveira, filho de José Pinto d'Oliveira, natural de Guimarães—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

130—Illydio Fernandes Monteiro, filho de Manoel Fernandes Monteiro, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

131—Izolino Aurelio Ferreira Ennes, filho de José Augusto Ennes Junior, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

132—João Alves Pinto da Cruz, filho de João Alves da Cruz, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

133—João Augusto dos Santos Teixeira, filho de Augusto Cesar Justino Teixeira, natural de Lamego—1.ª, 6.ª (1.ª parte);

134—João Carlos de Castro Côrte Real Machado, filho de João Carlos d'Almeida Machado, natural d'Oliveirinha, concelho d'Aveiro—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

135—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos, filho de João d'Oliveira Ramos, natural de Santa Maria de Vallega, concelho d'Ovar—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª, 10.ª (1.ª parte);

136—João Dias Pereira da Graça, filho de Januario Dias Pereira da Graça, natural de Sôsa, concelho de Vagos—10.ª (1.ª parte);

137—João Fernandes da Silva Leão, filho de José Fernandes da Silva Leão, natural de Bissau (Guiné)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

138—João Gomes da Silva Osorio Junior, filho de João Gomes da Silva Osorio, natural de Lamego—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

139—João Luiz Carrilho, filho de Manoel José Carrilho, natural de Seixas, concelho de Caminha—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

140—João Machado d'Araujo, filho de Joaquim da Costa Araujo, natural de Landim, concelho de Famalicão—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

141—João Monteiro Guedes, filho de Rita Laró, natural de Moura-Morta, concelho da Regoa—8.ª, (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

142—João Pereira Vasco, filho de Manoel Pereira Vasco, natural de Olhão—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

143—João Simões Castello, filho de Antonio Simões Castello, natural de Lisboa—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

144—Joaquim Dias do Soccorro, filho de Joaquim Antonio do Soccorro, natural de Villa do Conde—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

145—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco, filho de Antonio Pereira Rodrigues Pacheco d'Almeida, natural de Sande, concelho de Lamego—13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 15.ª (1.º anno), 16.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

146—Joaquim José Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Penafiel—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

147—Joaquim Manoel Cabral, filho de Antonio Joaquim Cabral, natural d'Outeiro de Gatos, concelho da Mêda—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

148—Joaquim de Mattos Coutinho, filho de José de Mattos Coutinho, natural d'Alpiarça, concelho d'Almeirim—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

149—Joaquim Pinto Coelho, filho do José Pinto Coelho, natural de Mósellos, concelho da Feira—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

150—Joaquim de Sousa Brandão, filho de Francisco José de Sousa Brandão, natural de Lordello, concelho de Paredes—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

151—José Alves Bonifacio, filho de José Alves Bonifacio, natural de

Castello de Neiva, concelho de Vianna do Castello—13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 15.ª (1.º anno) e 16.ª (2.ª parte);

152—José Alves Ferreira da Silva, filho de Augusto Alves Ferreira da Silva, natural de Santo Antonio da Lomba, concelho de Gondomar—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

153—José Antonio Duarte, filho de Francisco Antonio Duarte, natural das Caldas da Rainha—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

154—José Antonio Gonçalves de Lima, filho de Antonio Gonçalves de Lima, natural do Porto—7.ª (1.ª parte), 10.ª (2.ª parte), 11.ª (2.ª parte) e 17.ª (1.º anno);

155—José Augusto de Campos e Brito, filho de Francisco Antonio da Costa e Brito, natural de Melgaço—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

156—José Augusto Vieira da Fonseca, filho de José Augusto Vieira da Fonseca, natural de Chaves—2.ª, 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

157—José Augusto Villas Boas, filho de Severino Cesar Villas Boas, natural de S. Faustino, concelho do Peso da Regoa—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

158—José Baptista Gonçalves Dias Junior, filho de José Baptista Gonçalves Dias, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

159—José Caetano de Sousa e Lacerda, filho de João Caetano de Sousa e Lacerda, natural de S. Thiago da Ribeira Secca, concelho da Calhêta (Açores)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

160—José Corrêa Pinto da Fonseca, filho de Francisco Corrêa Pinto, natural de Samodães, concelho de Lamego—8.ª (1.ª parte), 9.ª e 11.ª (1.ª parte);

161—José da Cunha Rolla, filho de José da Cunha Rolla Pereira, natural de S. Christovão de Lordello, concelho de Felgueiras—1.ª, 6.ª (1.ª parte);

162—José Dordio Rebocho Paes, filho de Antonio Paes Dordio Falcato, natural de Cano, concelho de Souzel—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

163—José Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves d'Araujo, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

164—José Gonçalves da Costa, filho de Manoel Gonçalves da Costa, natural de Balazar, concelho da Povoa de Varzim—12.ª, 13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno), 16.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

165—José Guedes Junior, filho de José Guedes de Carvalho, natural de Ervedosa, concelho da Pesqueira—11.ª (1.ª parte);

166—José Henriques de Meirelles Pinto, filho de Manoel Antonio Meirelles, natural de S. Bartholomeu, concelho de Villa Flor—7.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

167—José Lopes dos Rios, filho de José Lopes dos Rios, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

168—José Maria Rebello da Silva, filho de José Antonio Rebello da Silva, natural de Braga—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

169—José Maria Rodrigues de Faria, filho de Lino Antonio Rodrigues

de Faria, natural de S. Thiago de Lanhoso, concelho da Povoa de Lanhoso —7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

170—José Maria Rebello Valente de Carvalho, filho de João Nepomuceno Rebello Valente, natural d'Oliveira d'Azemeis—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

171—José Mendes Esteves Guimarães, filho de Antonio José Esteves Guimarães, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

172—José do Nascimento Ribeiro da Cruz, filho de José Ribeiro da Cruz, natural de Fozcôa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

173—José Pinto Pizarro da Gama Lobo, filho de Francisco Teixeira Lobo, natural de Sabroza—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

174—José Rodrigues Braga, filho de José Rodrigues Braga, natural de Chaves—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

175—José Vicente d'Araujo, filho de Antonio Vicente d'Araujo, natural de Tongues, concelho de Villa do Conde—10.ª (1.ª parte);

176—José Vicente da Silva Senna, filho de João Vicente Senna, natural d'Elvas—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

177—Julio Baptista da Cunha Braga, filho de João Baptista Braga, natural de Braga—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

178—Julio de Carvalho Baptista, filho de José Maria Lopes de Carvalho Baptista, natural de Celorico da Beira—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

179—Julio Lopes Valente da Cruz, filho de João Carlos da Cruz, natural da Guarda—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

180—Julio da Mouta Sardinha, filho d'Antonio Sardinha, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

181—Julio Nunes de Mattos, filho de Francisco Augusto Nunes de Mattos, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

182—Lucindo Martins d'Oliveira, filho de Francisco Moreira d'Oliveira, natural de S. João da Foz do Sousa, concelho de Gondomar—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

183—Luiz Couto dos Santos, filho de Miguel Couto dos Santos, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

184—Luiz de Freitas Viegas, filho de Luiz de Freitas Viegas, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

185—Luiz José de Lima, filho d'Antonio José de Lima, natural do Rio de Janeiro—8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

186—Luiz Paulo d'Aguiar, filho de Francisca Ermelinda d'Oliveira Ferraz, natural de Gourães, concelho de Sabrosa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

187—Luiz Pinto Ribeiro da Fonseca, filho de Manoel Ribeiro da Fonseca, natural de Villar do Paraiso, concelho de Villa Nova de Gaya—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

188—Luiz Xavier Barbosa da Costa, filho de João Thomaz da Costa, natural de Vianna do Castello—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

189—Manoel Augusto de Queiroz e Castro, filho de Joaquim Augusto

de Queiroz, natural de S. Cosmado, concelho d'Armamar—11.ª (1.ª parte);

190—Manoel Correia d'Almeida, filho de Miguel Correia d'Almeida, natural de Villa Real—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

191—Manoel Ferreira Machado Junior, filho de Manoel Ferreira Machado, natural de Fontes, concelho de Leiria—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

192—Manoel Garrido Monteiro, filho de Manoel Garrido Baqueiro, natural de Santa Maria d'Insua, concelho de Ponte-Caldella (Galliza)—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

193—Manoel Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves d'Araujo, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

194—Manoel Luiz Mendes, filho de João Francisco Mendes, natural de Seara, concelho de Ponte de Lima—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

195—Manoel de Mello Ferrari, filho de José de Mello Ferrari, natural de Villar d'Ordem, concelho de Vizeu—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

196—Manoel Nunes d'Oliveira, filho de José Nunes d'Oliveira, natural de Sôsa, concelho de Vagos—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

197—Manoel Pinto Pimentel, filho de Joaquim Pinto Furtado, natural de Favaios, concelho d'Alijó—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

198—Manoel de Sousa Machado Junior, filho de Manoel de Sousa Machado, natural do Porto—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

199—Manoel Victorino de Bettencourt Junior, filho de Manoel Victorino de Bettencourt, natural de Santa Barbara, concelho de Villa das Vellas (Açores)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

200—Narciso da Silva Guimarães, filho d'Antonio Joaquim da Silva Guimarães, natural de S. Christovão da Matta, concelho de Villa do Conde —6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

201—Olympio Arthur d'Oliveira Dias, filho d'Antonio Augusto d'Oliveira Dias, natural de Bragança—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

202—Olympio Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—2.ª e 7.ª (1.ª parte);

203—Oscar Cibrão e Garção, filho de Francisco Luiz Garção, natural de Valença—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

204—Paulo Ferreira, filho de Luiz José Ferreira, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

205—Raul Corrêa Bettencourt Furtado, filho de José Candido de Bettencourt Furtado, natural da Horta (Ilha do Fayal)—1.ª e 18.ª (1.ª parte);

206—Raul Larose Rocha, filho de José Gonçalves Rocha, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

207—Raymundo Ferreira dos Santos, filho d'Antonio Ferreira dos Santos, natural do Porto—5.ª (2.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª (2.º anno), 14.ª (2.º anno) e 15.ª (1.º anno);

208—Ricardo Candido Furtado d'Antas, filho de João Candido Furtado d'Antas, natural de Lisboa—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

209—Ricardo Severo da Fonseca Costa, filho de José Antonio da

Fonseca Costa, natural de Lisboa—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

210—Rita de Moraes Sarmento, filha d'Anselmo de Moraes Sarmento, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

211—Rodolpho Augusto da Silva Telles, filho d'Antonio Xavier da Silva Telles, natural de Pondá (India portugueza)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

212—Ruy da Rocha e Castro, filho d'Agostinho da Rocha e Castro, natural de S. Pedro, concelho de Villa Real—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

213—Samuel Tavares Maia, filho de Manoel Tavares d'Almeida Maia, natural de Ilhavo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

214—Sebastião Barroso Monge, filho de Pedro Monge, natural d'Aldeia Nova, concelho de Serpa—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

215—Segismundo Alves Roçadas, filho d'Anna de Jesus Ferreira, natural de Villa Real—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte);

216—Serafim Martins dos Santos, filho de Francisco Martins dos Santos, natural de Castello de Paiva—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

217—Theodorico Teixeira Pimentel, filho de João Rodrigues Pimentel, natural de Favaios, concelho d'Alijó—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

218—Thiago Augusto d'Almeida, filho de José Bernardino d'Almeida, natural de Gandra, concelho d'Esposende—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

219—Torquato Ernesto Leite Brochado, filho d'Affonso Augusto Cardoso Brochado, natural de S. Pedro d'Athayde, concelho d'Amarante—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

220—Vasco Ortigão de Sampaio, filho de José Joaquim d'Oliveira Sampaio, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

221—Vicente Augusto Bayão Taquenho, filho de Francisco Joaquim Gomes Taquenho, natural de Cuba—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

222—Vicente de Bessa, filho de Leonardo Joaquim de Bessa, natural de Penella, concelho de Castello de Paiva—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

223—Vicente Moreira de Carvalho, filho de Antonio Moreira de Carvalho, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

224—Victor Henriques Ayres Móra, filho de Emygdio Antonio Móra, natural do Sardoal—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

225—Victor Hugo José Teixeira Machado, filho de Antonio Anastacio Machado, natural de S. Miguel, concelho de Santa Martha de Penaguião—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

226—Virginio José Gomes Braga, filho de Manoel José Gomes Braga, natural de Vimieiro, concelho de Braga—6.ª (1.ª parte) e 7.ª (1.ª parte).

Quadro estatistico dos alumnos matriculados em 1887-1888 distribuidos segundo a sua naturalidade

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Aveiro	Aveiro	3	18	40
	Castello de Paiva	3		
	Ilhavo	2		
	Macieira de Cambra	1		
	Oliveira d'Azemeis	2		
	Ovar	2		
	Sever do Vouga	1		
	Vagos	2		
	Villa da Feira	2		
Beja	Cuba	2	3	
	Serpa	1		
Braga	Barcellos	1	19	
	Braga	7		
	Cabeceiras de Basto	1		
	Celorico de Basto	1		
	Espozende	1		
	Fafe	1		
	Famalicão	1		
	Guimarães	3		
	Povoa de Lanhoso	2		
	Vieira	1		

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Transporte				40
Bragança	Bragança	2	8	
	Carrazeda d'Anciães	2		
	Mogadouro	2		
	Moncorvo	1		
	Villa-Flôr	1		
C. Branco	Fundão	1	1	
Coimbra	Coimbra	1	1	
Faro	Olhão	1	1	
Guarda	Ceia	1	5	31
	Celorico da Beira	1		
	Guarda	1		
	Villa Nova de Fozcôa	2		
Leiria	Caldas da Rainha	1	4	
	Figueiró dos Vinhos	1		
	Leiria	2		
Lisboa	Belem	1	7	
	Lisboa	5		
	Torres Vedras	1		
Portalegre	Alter do Chão	1	4	
	Elvas	1		
	Souzel	2		

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Transporte				71
Porto	Amarante	3		
	Baião	2		
	Felgueiras	1		
	Gondomar	2		
	Marco de Canavezes	1		
	Paços de Ferreira	1		
	Paredes	3	80	
	Penafiel	2		
	Porto	57		
	Povoa de Varzim	2		
	Santo Thyrso	1		
	Villa do Conde	3		
	Villa Nova de Gaya	2		
Santarem	Almeirim	1	2	
	Sardoal	1		
V. do Castello	Caminha	1		
	Melgaço	1		
	Ponte do Lima	1	12	
	Valença	4		
	Vianna do Castello	5		
Villa Real	Alijó	2		
	Chaves	3		
	Murça	1		
	Regoa	6	21	
	Sabroza	3		
	Santa Martha de Penaguião	1		
	Valpassos	1		
	Villa Real	4		
				115

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Transporte				186
Vizeu	Armamar	1	18	
	Lamego	11		
	S. João da Pesqueira	1		
	S. Pedro do Sul	1		
	Vizeu	4		
ILHAS ADJACENTES				
Angra	Angra do Heroismo	2	3	
	Villa das Vellas	1		
Funchal	Calheta	1	1	
Horta	Horta	2	2	
POSSESSÕES ULTRAMARINAS				40
E. G. da India	Pondá	1	1	
Cabo Verde	Bissau	1	1	
PAIZES ESTRANGEIROS				
Brazil	Bahia	1	12	
	Rio de Janeiro	10		
	Rio Preto	1		
França	Steenwerk	1	1	
Hespanha	Ponte Caldella (Galliza)	1	1	
	Total			226

Quadro do exercicio dos cursos no anno lectivo de 1886 a 1887

DESIGNAÇÃO DOS CURSOS	ABERTURA DO CURSO	ENCERRAMENTO DO CURSO	N.º total das lições e exercicios	Duração das lições	N.º de horas semanaes de cada curso
1.ª—Geometria analytica no plano e no espaço; trigonometria espherica; algebra superior	25 d'outubro de 1886	16 de junho de 1887	74	2	6
2.ª—Calculo differencial e integral . . .	21 » »	16 » »	84	2	6
3.ª—Mecanica racional; Cinematica . . .	21 » »	18 » »	84	2	6
4.ª—Geometria descriptiva	21 » »	14 » »	85	2	6
5.ª—Astronomia e geodesia.	25 » »	15 » »	63	2	6
6.ª—Physica	22 » »	15 » »	70	2	6
7.ª—Chimica inorganica.	21 » »	31 de maio »	68	2	6
8.ª—Chimica organica e analytica. . . .	22 » »	16 de junho »	89	2	6
9.ª—Mineralogia e geologia.	21 » »	16 » »	76	2	6
10.ª—Botanica.	22 » »	16 » »	66	2	6
11.ª—Zoologia.	22 » »	31 de maio »	60	2	6
12.ª—Resistencia de materiaes.	22 » »	15 de junho »	65	2	6
13.ª—Hydraulica e machinas.	21 » »	16 » »	79	2	6
14.ª—Construcções	22 » »	15 » »	69	2	6
15.ª—Montanistica e docimasia	21 » »	11 » »	72	2	6
16.ª—Economia politica, etc.	22 » »	15 » »	52	2	6
17.ª—Commercio	21 » »	20 » »	80	2	6
18.ª—Desenho.	21 » »	30 » »	75	2	6

Alumnos premiados e distinctos no anno lectivo de 1886 a 1887, proclamados em sessão solemne de 17 d'outubro de 1887

1.ª Cadeira

Distincção — Gregorio Correia Pinto Rolha.
» — Guilherme Maria Rodrigues Bello.

2.ª Cadeira

Accessit — Abel Fontoura da Costa.
» — Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
Distincção — Annibal Augusto Trigo.

3.ª Cadeira

1.º accessit — João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
2.º » — Casimiro Jeronymo de Faria.
» » — Manoel de Souza Machado Junior.

4.ª Cadeira

Accessit — Antonio José de Lima.

6.ª Cadeira

Premio honorifico — Arthur Pinto Malheiro.
Accessit — Antonio José da Motta Campos Junior.
» — José Alves Ferreira da Silva.
— Antonio Joaquim Judice Cabral.
Distincto — Francisco Forbes de Bessa.
— Carlos Henrique Coisne.
— Arthur Hygino Soares.
— Manoel Gonçalves d'Araujo.
— José Maria Rebello Valente de Carvalho.

7.ª Cadeira

Premio honorifico — Arthur Pinto Malheiro.
1.º accessit — Antonio Joaquim Judice Cabral.
— Antonio José da Motta Campos Junior.
— José Alves Ferreira da Silva.
2.º *accessit* — Alberto Vieira Gomes.
— Annibal Bettencourt.
Distincção — Custodio Martins Henriques.

8.ª Cadeira (1.ª e 2.ª parte)

1.º Premio honorifico — Arthur Pinto Malheiro.
2.º » » — Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.
1.º accessit — Annibal Bettencourt.
— Antonio Augusto da Costa Soares.
— Antonio Joaquim Judice Cabral.
— Antonio José da Motta Campos Junior.
— Arnaldo Augusto Gomes Ferreira.
— João Delfim de Mattos Rivára.
2.º *accessit* — Alexandre Martins Pamplona Ramos.
Distincção — Alfredo da Costa Rodrigues.
— Eduardo de Barros.
— João Alves Martins.
— Manoel Augusto Dias Milheiro.

8.ª Cadeira (2.ª parte)

1.º accessit — Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
— Annibal Augusto Trigo.
2.º » — João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
Distincção — Ricardo Severo da Fonseca Costa.

10.ª Cadeira

Accessit — Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.

11.ª Cadeira

1.º accessit — Antonio Augusto Pereira Cardoso.
2.º » — Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.
Distincção — Humberto Pinto da Costa Araujo.

12.ª Cadeira

Accessit — Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco.

13.ª Cadeira

Accessit — José Alves Bonifacio.
Distincção — Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco.

14.ª Cadeira

Distincção — José Alves Bonifacio.
» — Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco.

18.ª Cadeira (1.ª parte)

Distincção — Hugo de Noronha.

18.ª Cadeira (2.ª parte)

Premio honorifico — Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
» » — Alberto Pereira Pinto d'Aguiar.
Accessit — Fernando de Souza Magalhães.
Distincção — Carlos José Gomes Brandão.
» — Annibal Augusto Trigo.
» — Carlos Henrique Coisne.
» — Manoel Gonçalves d'Araujo.

18.ª Cadeira (3.ª parte)

Accessit — Antonio Duarte Pereira da Silva.

Classificação dos alumnos que terminaram o 3.º anno do curso d'engenharia no anno lectivo de 1885-1886

2.ª CLASSE

Casimiro Augusto Lobo Ramalho.
Alfredo Djalme Martins d'Azevedo.

3.ª CLASSE

1.º—Alberto Pimenta Castel-Branco.
2.º—Antonio Rigaud Nogueira.

no anno lectivo de 1886-1887

1.ª CLASSE

1.º—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
1.º—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães.
2.º—Manoel de Souza Machado Junior.

2.ª CLASSE

1.º—Casimiro Jeronymo de Faria.
2.º—Antonio José de Lima.
3.º—Alfredo Baptista Coelho.
4.º—Ricardo Severo da Fonseca Porto.

3.ª CLASSE

1.º—Antonio Ferreira da Silva Barros.
2.º—Alfredo Ernesto Dias Branco.
3.º—Alvaro Aurelio de Souza Rego.
3.º—Antonio Duarte Pereira da Silva.
4.º—Fernando de Souza Magalhães.

Designação dos alumnos que tiraram carta de capacidade de cursos da Academia no anno lectivo de 1886 a 1887

Nomes e designação do curso	Data em que foi conferida a carta de curso
Commerciantes	
José Bento Rodrigues Pereira	22 de janeiro de 1887.
Minas	
William Macdonald Smith.....	21 de julho de 1887.

Mappa estatistico do movimento dos alumnos da Academia no anno lectivo de 1886 a 1887

CADEIRAS	ALUMNOS MATRICULADOS POR CADEIRAS		APPROVADOS		REPROVADOS	NÃO EXAMINADOS	ALUMNOS DISTINCTOS COM			TOTAL DOS DISTINCTOS
	ordinarios	voluntarios	n. d.	simp.			premio honorifico	accessit.	m. honrosa	
1.ª—Algebra superior, etc. . . .	8	34	13	16	2	9			2	2
2.ª—Calculo differencial, etc. . .	1	22	8	1	4	10		2	1	3
3.ª—Mecanica; Cinematica . . .		22	7	5	2	8		3		3
4.ª—Geometria descriptiva . . .		34	9	6	1	18		1		1
5.ª—Astronomia, geodesia e topographia	2	14	13	2		1				
6.ª—Physica	33	72	59	13	23	10	1	3	6	10
7.ª—Chimica inorganica.	39	49	35	10	12	31	1	5	1	7
8.ª—Chimica organica e analytica	42	99	51	4	9	77	2	9	5	16
9.ª—Mineralogia e geologia . . .	1	10	4	1	1	5				
10.ª—Botanica	25	64	25	14	20	30		1		1
11.ª—Zoologia	24	35	23	3	3	30		2	1	3
12.ª—Resistencia de materiaes . .	2	4	3	1		2		1		1
13.ª—Hydraulica e machinas. . .	2	5	4	3				1	1	2
14.ª—Construcções.	3	3	5	1	1				2	2
15.ª—Montanistica e docimasia. .	2	3	4	1						
16.ª—Economia politica, etc.. . .	1	13	9			5				
17.ª—Commercio.		2	1							
18.ª—Desenho	11	75	51	1			2	2	5	9
	196	560	324	82	78	233				60
	756		406							

III

Legislação

Decreto de 14 d'agosto de 1885 sobre a collocação de 2 lentes na propriedade de 2 cadeiras da Academia Polytechnica

MINISTERIO DO REINO

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

Dr. José Diogo Arroyo, lente proprietario da cadeira de zoologia da Academia Polytechnica do Porto, collocado na cadeira de chimica inorganica da mesma Academia.

Manuel Amandio Gonçalves, lente substituto da Academia Polytechnica do Porto, promovido á propriedade da cadeira de zoologia.

Secretaria d'estado dos Negocios do Reino, em 19 de agosto de 1885. — *Antonio Maria de Amorim.*

(*Diario do Governo* n.º 184, de 20 d'agosto de 1885.)

Decreto de 23 de setembro de 1885 sobre a collocação de varios lentes da Academia Polytechnica

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

Por decreto de 23 de setembro ultimo, em virtude da carta de lei de 21 de julho de 1885, collocados: nas cadei-

ras da Academia Polytechnica do Porto, os respectivos lentes proprietarios, pela fórma seguinte:

Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso — na 10.ª cadeira (Botanica); Francisco da Silva Cardoso — na 18.ª cadeira (Desenho); Conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado — na 16.ª cadeira (Economia politica, estatistica, principios de direito publico, administrativo e commercial, legislação); José Joaquim Rodrigues de Freitas, na 17.ª cadeira (Commercio); Dr. Adriano de Paiva de Faria Leite Brandão — na 6.ª cadeira (Physica); Joaquim de Azevedo Souza Vieira da Silva Albuquerque — na 3.ª cadeira (Mecanica racional, cinematica); Antonio Joaquim Ferreira da Silva — na 8.ª cadeira (Chimica organica e analytica); Manoel da Terra Pereira Vianna — na 13.ª cadeira (Hydraulica, machinas); Dr. Wenceslau de Souza Pereira Lima — na 9.ª cadeira (Mineralogia, paleontologia e geologia); Dr. Francisco Gomes Teixeira — na 2.ª cadeira (Calculo differencial e integral, calculo das differenças e das variações); Roberto Rodrigues Mendes — na 12.ª cadeira (Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções); Luiz Ignacio Woodhouse — na 1.ª cadeira (Geometria analytica, algebra superior, trigonometria espherica).

Secretaria d'estado dos Negocios do Reino, em 10 de novembro de 1885. — *Antonio Maria de Amorim.*

(*Diario do Governo* n.º 255, de 11 de novembro de 1885.)

7.ª

DECRETO N.º 1

Aposentação dos empregados civis

Artigo 1.º É garantida a aposentação, conforme as prescripções d'este decreto, aos empregados e funccionarios civis ou magistrados, pagos pelos cofres do estado que, por effeito da legislação em vigor, têem direito de ser jubilados ou aposentados.

§ unico. Igualmente é concedido o direito de aposentação aos empregados que, não o gosando actualmente, contem menos de quarenta e cinco annos de idade e se sujeitem ao pagamento da quota por idades, fixada na tabella annexa a este decreto, que faz parte d'elle e que baixa assignada pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da fazenda.

Art. 2.º A aposentação dos empregados civis póde ser ordinaria ou extraordinaria.

Art. 3.º São condições indispensaveis para obter a aposentação ordinaria:

1.º Ter completado sessenta annos de idade e trinta de serviço effectivo;

2.º Absoluta impossibilidade, physica ou moral, de continuar no desempenho do cargo;

3.º Contribuição, durante dez annos ao menos, com a quota legal para a caixa das aposentações.

§ 1.º Na contagem do tempo de serviço não são attendidos os dias de suspensão, de faltas não justificadas, nem de licença por mais de trinta dias em cada anno.

§ 2.º A impossibilidade physica ou moral é verificada pelo exame de tres facultativos nomeados pelo governo e parecer fundamentado do chefe da repartição ou serviço a que pertença o empregado a aposentar.

§ 3.° A disposição do n.° 3.° d'este artigo não é applicavel aos actuaes empregados que, ao tempo da publicação d'este decreto, tiverem completado cincoenta annos de idade.

Art. 4.° A aposentação extraordinaria é concedida:

1.° Ao empregado que, contando quarenta annos de idade e quinze de serviço, se impossibilite de continuar na actividade por motivo de doença não contrahida, ou accidente não occorrido no exercicio das suas funcções;

2.° Ao empregado de qualquer idade que, tendo dez annos de serviço, se impossibilite de continuar na actividade em rasão de molestia contrahida no exercicio das suas funcções e por causa d'elle;

3.° Ao empregado que, independentemente de qualquer outra condição, se torne inhabil para o serviço por desastre que resulte do exercicio das suas funcções; por ferimento ou mutilação em combate ou lucta no desempenho do cargo; por molestia adquirida na pratica de algum acto humanitario ou de dedicação á causa publica.

§ 1.° Ás causas de impossibilidade previstas n'este artigo são applicaveis as disposições do § 2.° do artigo 3.°

§ 2.° Cessando a impossibilidade, e verificado que seja esse facto pelo modo indicado no paragrapho antecedente, o empregado será restituido á actividade do serviço no mesmo logar que servia, ou n'outro equivalente e na primeira vacatura que se der.

Art. 5.° Perde o direito á aposentação o empregado que for demittido ou exonerado; porém, sendo readmittido, contar-se-lhe-ha o tempo de serviço anterior.

Art. 6.° Para o effeito das aposentações só póde contar-se cumulativamente o tempo de serviço em cargos ou empregos que dêem direito á aposentação ou jubilação.

Art. 7.° No caso de aposentação ordinaria a pensão do aposentado é igual ao vencimento do ultimo cargo exercido

durante ao menos cinco annos, mas nunca superior á quantia de 1:200$000 réis. Este limite será reduzido a réis 1:000$000 para os empregados nomeados depois da publicação da lei de 15 de julho de 1885.

§ 1.° O limite de cinco annos é reduzido a dois para os empregados que tenham actualmente pelo menos quinze annos do serviço.

§ 2.° No caso de um empregado ter sido transferido por conveniencia do serviço, e não como castigo, para logar de vencimento menor dentro da mesma categoria, regulará o vencimento do logar mais rendoso exercido ao menos durante cinco annos.

Art. 8.° Nas aposentações extraordinarias as pensões são:

1.° De metade do vencimento nos casos dos n.os 1.° e 2.° do artigo 4.° com o augmento de 3 1/3 por cento no primeiro caso e de 2 1/2 por cento no segundo, por anno de serviço a mais do minimo ali designado, até trinta annos;

2.° Na hypothese do n.° 3.° do artigo 4.° a pensão será igual ao vencimento da actividade.

§ unico. A disposição do artigo 7.° é applicavel em todos os casos previstos n'este artigo.

Art. 9.° Para os effeitos dos artigos 7.° e 8.° d'este decreto só se considera o ordenado ou o vencimento principal com exclusão de gratificações, supplementos de ordenado, emolumentos, ajudas de custo, augmento por diuturnidade de serviço, ou outras retribuições accessorias de qualquer natureza.

§ 1.° A disposição d'este artigo não é applicavel ao augmento do terço de ordenado concedido aos juizes e professores por diuturnidade de serviço, nem ás partes dos emolumentos concedidas nas aposentações de empregados das alfandegas.

§ 2.° Igualmente não se applica o disposto n'este artigo

*

aos funccionarios ou magistrados a quem seja imposto por lei um limite de idade para aposentação.

Art. 10.° A aposentação póde ser concedida, ou a requerimento do interessado, ou por determinação do governo independentemente de solicitação d'aquelle.

§ 1.° Quando a aposentação provenha de determinação do governo e o empregado com ella não se conforme, é-lhe permittido recorrer do parecer da junta medica estabelecida pelo artigo 3.° § 2.° para uma nova junta, composta de dois facultativos nomeados pelo governo, dois escolhidos pelo interessado entre os lentes da escola medico-cirurgica de Lisboa e o director do serviço ou repartição a que o aposentado pertença, presidindo o ultimo que dará aos outros membros da junta todos os precisos esclarecimentos. Se esta nova junta confirmar o parecer da primeira, serão pagos pelo interessado os honorarios dos facultativos que a compozerem.

§ 2.° Em qualquer hypothese o decreto da aposentação conterá as causas e condições d'esta, bem como a pensão concedida, e não sortirá effeito de pagamento da pensão, emquanto o processo não tiver recebido *visto* pelo qual o tribunal de contas reconheça a legalidade da aposentação e o seu cabimento dentro do fundo disponivel de que trata o n.° 2.° do artigo 17.°

§ 3.° Emquanto o *visto* não for concedido, não póde ser provido o logar exercido pelo pensionista.

§ 4.° O governo dará todos os annos ás côrtes conta circumstanciada das aposentações que tiver decretado.

Art. 11.° O empregado aposentado perde a respectiva pensão quando seja condemnado em alguma das penas maiores estabelecidas na lei penal, ou ainda em pena correccional por crime de furto, abuso de confiança, burla, receptação de cousa furtada ou roubada, falsidade, attenta-

do contra o pudor ou qualquer outro que importe perda dos direitos politicos.

Art. 12.° As pensões de aposentação só pódem ser penhoradas nos mesmos casos e proporções que os vencimentos da actividade.

Art. 13.° A pensão de aposentação não póde ser accumulada com qualquer outro vencimento pago pelos cofres do estado, quando da accumulação resulte quantia superior ou igual á que o empregado perceberia, se continuasse no serviço activo.

Art. 14.° Todos os empregados civis nomeados depois da data d'este decreto, ou que por effeito de reorganisação ou reforma legal dos serviços ou repartições recebam melhoria de vencimentos depois da mesma data, bem como os que depois da mesma data forem promovidos ou augmentados em vencimento por diuturnidade de serviço, são obrigados a contribuir para a caixa de aposentações com a quota de 5 por cento, deduzida para os primeiros e segundos de todos os seus vencimentos, fixos ou eventuaes, de qualquer natureza que sejam, excepto abonos para despeza de jornada, para renda das casas das repartições ou para despezas d'estas, e para os terceiros deduzidos de qualquer excesso de vencimentos proveniente da promoção ou augmento.

§ 1.° A importancia das quotas pagas por empregados que se impossibilitem antes de terem adquirido direito á aposentação extraordinaria será restituida aos interessados sem vencimento de juros.

§ 2.° Os empregados a que se referem os artigos 2.° e 3.° da lei de 15 de julho de 1885 continuarão pagando a quota n'ella fixada até que se verifiquem as circumstancias previstas n'este artigo. O producto anterior e futuro das mesmas quotas faz parte do capital da caixa de aposentações.

Art. 15.° O pagamento das quotas de que trata o artigo

precedente, é feito por desconto nas folhas ou recibos dos vencimentos de qualquer natureza, e a sua importancia será entregue mensalmente na caixa de aposentações.

Art. 16.º Junto do monte pio official é creada uma caixa de aposentações para os empregados civis, a qual fica sujeita á inspecção e fiscalisação do governo, exercida pelo ministerio da fazenda.

§ unico. Á caixa de aposentações incumbe arrecadar e capitalisar os seus rendimentos, e pagar as pensões dos interessados que apresentem os seus titulos visados pelo tribunal de contas.

Art. 17.º Os fundos da caixa de aposentação dividem-se:

1.º Em fundo permanente e indefinido formado pela capitalisação de 10 por cento do fundo disponivel, pelos saldos d'esse mesmo fundo e por quaesquer quantias provenientes das multas, de que trata o artigo 20.º

2.º Em fundo disponivel resultando: *a)* do subsidio annual que as côrtes fixarem; *b)* das quotas dos empregados; *c)* do rendimento do fundo permanente, tudo liquido dos 10 por cento de que trata o numero precedente.

Art. 18.º Os fundos da caixa de aposentações, á proporção que possam ser capitalisados, serão convertidos em titulos de divida publica consolidada.

Art. 19.º O dinheiro pertencente á caixa de aposentações será depositado na caixa geral dos depositos, e ali vencerá o juro concedido aos depositos voluntarios. A direcção não poderá ter em cofre quantia superior a 500$000 réis.

Art. 20.º Constituem receita da caixa de aposentações:

1.º Os descontos dos vencimentos dos empregados por motivo de licenças, faltas não justificadas, ou suspensão;

2.º As multas impostas aos empregados por faltas ou abusos no exercicio das suas funcções;

3.º Quaesquer donativos ou legados á mesma caixa.

Art. 21.° A administração da caixa de aposentações é confiada a uma assembléa geral e a uma direcção, composta de presidente que será o mesmo do monte pio official, tres vogaes, um thesoureiro e dois secretarios.

Art. 22.° Os vogaes da direcção, os secretarios e o thesoureiro são eleitos annualmente pela assembléa geral, devendo a eleição cair sempre em dois membros da direcção cessante, sem que nenhum seja obrigado a servir por mais de tres annos consecutivos.

Metade pelo menos da direcção será composta de empregados cujo vencimento não seja inferior a 500$000 réis, pertencendo sempre o thesoureiro a essa metade.

Art. 23.° Todos os cargos da direcção são gratuitos e obrigatorios, não podendo ser escolhidos para ella senão empregados residentes em Lisboa.

Art. 24.° Os membros da direcção são solidariamente responsaveis pelos prejuizos que causarem á caixa por actos de negligencia, omissão ou culpa.

Art. 25.° Haverá uma commissão revisora composta de tres membros, eleita annualmente pela assembléa geral, á qual competirá:

1.° Examinar o relatorio, livros e gerencia da direcção;

2.° Enviar ao governo e apresentar em assembléa o seu parecer ácerca dos actos administrativos da direcção e ácerca do estado da caixa.

Art. 26.° A' assembléa geral da caixa de aposentações podem pertencer todos os empregados civis do estado, que tenham direito á aposentação e que paguem pelo menos 12$000 réis de quota annual. A essa assembléa geral competem as mesmas faculdades e attribuições, que pertencem á do monte pio official.

Art. 27.° O governo proporá todos os annos ás côrtes o subsidio que ha de ser concedido á caixa de aposentações. Emquanto as côrtes não resolvam será n'este anno

economico o subsidio igual aos juros da quantia de réis 1.177:850$000 nominaes de inscripções averbadas a favor da caixa nacional de aposentações, que serão entregues á caixa de aposentações com o devido pertence.

Art. 28.º As aposentações e jubilações concedidas até a data do presente decreto continuam a ser pagas pelo thesouro, conforme a legislação em vigor.

Art. 29.º As disposições dos artigos 7.º e 8.º d'esta lei não são applicaveis aos empregados de qualquer natureza ou categoria, que, tendo direito a ser aposentados ou jubilados, nos termos da legislação em vigor, houverem completado quinze annos de serviço, uma vez que n'elles se verifiquem na occasião da aposentação as condições estabelecidas nos n.os 1.º e 2.º do artigo 3.º

Art. 30.º Não são applicaveis as disposições d'este decreto aos operarios e quaesquer outros servidores do estado, cujo vencimento tenha o caracter de salario ou jornal.

Art. 31.º Podem ser admittidos na caixa de aposentações os empregados das juntas geraes dos districtos, e camaras municipaes, verificadas as seguintes condições:

1.ª Acceitarem essas corporações todos os preceitos do presente decreto ácerca de aposentações ordinarias ou extraordinarias;

2.ª Obrigarem-se a pagar mensalmente á caixa de aposentações e por conta de cada um dos seus actuaes empregados com direito a aposentação ou aos quaes queiram conferil-a, bem como pelos que nomearem com mais de trinta annos de idade, as quotas, de que tracta o § unico do artigo 1.º;

3.ª Obrigarem-se a pagar pelos empregados de futuro nomeados as quotas de que trata o artigo 14.º, quando tenham menos de trinta annos de idade.

4.ª Obrigarem-se a conceder á caixa de aposentações, quando seja necessario, uma subvenção proporcional á do

estado sendo a proporcionalidade relativa ao numero de empregados.

§ unico. São auctorisadas as juntas geraes e as camaras que pretendam aproveitar-se das disposições d'este artigo, a modificarem as disposições vigentes ácerca da aposentação dos empregados.

Art. 32.° Os lucros da caixa geral dos depositos ainda não convertidos em inscripções averbadas a favor da caixa nacional de aposentações e os que de futuro aquella obtiver, salvo a parte de que trata o decreto n.° 2 d'esta data, constituem receita do estado applicavel á amortisação da divida publica, conforme estava preceituado antes da lei de 15 de julho de 1885 sobre aposentações.

Art. 33.° A junta do credito publico entregará á administração da caixa de aposentações o capital existente em seu poder e pertencente á caixa nacional de aposentações, com excepção do que seja proveniente de subvenções das juntas geraes dos districtos ou das camaras municipaes, o qual será restituido ás corporações interessadas com os juros vencidos a rasão de 5 por cento ao anno.

Art. 34.° O governo decretará os estatutos da caixa de aposentações, fará os regulamentos necessarios para a execução d'este decreto, e dará conta ás côrtes das disposições d'elle que careçam de sancção legislativa.

Art. 35.° Ficam revogadas todas as disposições em contrario.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino; e os ministros e secretarios d'estado de todas as outras repartições, assim o tenham entendido e façam executar. Paço, 17 de julho de 1886.—REI.—*José Luciano de Castro—Francisco Antonio da Veiga Beirão—Marianno Cyrillo de Carvalho—Visconde de S. Januario—Henrique de Macedo—Henrique de Barros Gomes—Emygdio Julio Navarro.*

DECRETO N.° 2

† Reforma dos empregados e operarios não comprehendidos no decreto d'esta data, ácerca das aposentações dos empregados civis

Art. 1.° E' concedido o direito de reforma aos empregados menores de todos os ministerios, serviços, repartições e estabelecimentos d'elles dependentes, aos dos tribunaes superiores de justiça, de contas e de administração, que não gosem actualmente por lei ou regulamento o direito de aposentação, bem como aos operarios de todos os estabelecimentos fabris do estado, ou dos serviços d'elles dependentes que tenham caracter de permanencia, e que ou ao presente ou na data futura da sua admissão contem menos de quarenta e cinco annos de idade, e queiram sujeitar-se ao pagamento das quotas por idades, constantes da tabella annexa a este decreto, que faz parte d'elle, e baixa assignada pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da fazenda.

§ unico. Nas mesmas condições d'este artigo e seguintes é concedido o direito de reforma, desde que entrem nos quadros legaes, aos empregados e operarios de futuro admittidos nos estabelecimentos fabris da direcção geral de artilheria e do arsenal de marinha, ou aos que ainda actualmente se encontrem em situação, cujo tempo de serviço não se conte para reforma, quando uns e outros não contem mais de quarenta e cinco annos de idade.

Art. 2.° A reforma dos empregados e operarios, de que trata este decreto, póde ser ordinaria ou extraordinaria.

Art. 3.° São condições essenciaes para obter a reforma ordinaria:

1.ª Sessenta annos de idade e quarenta de serviço ou trabalho effectivo;

2.ª Absoluta impossibilidade physica ou moral de continuar na actividade;

3.ª Contribuição durante dez annos, ao menos, com a quota legal para a caixa de reformas creada por este decreto.

§ 1.º Na contagem do tempo de serviço ou trabalho não são attendidos os dias de suspensão, de faltas não justificadas, nem de licença por mais de trinta dias em cada anno.

§ 2.º A impossibilidade physica ou moral é verificada pelo exame de dois facultativos nomeados pelo governo, e informação fundamentada do director ou chefe do serviço ou officina, a que pertença o empregado ou operario a reformar.

Art. 4.º A reforma extraordinaria é concedida:

1.º Ao empregado ou operario que, contando quarenta e cinco annos de idade e vinte de serviço ou trabalho, se impossibilite de continuar na actividade por motivo de doença não contrahida ou de accidente não occorrido no serviço ou trabalho;

2.º Ao que, tendo qualquer idade e dez annos de serviço ou trabalho, se impossibilite de continuar na actividade em rasão de molestia contrahida no exercicio das suas funcções ou trabalho, e por effeito d'aquellas ou d'este;

3.º Ao que, independentemente de qualquer outra condição, se impossibilite por desastre que resulte do exercicio das suas funcções ou trabalho, por ferimento ou mutilação em combate ou lucta no desempenho do cargo ou trabalho, por molestia adquirida na pratica de algum acto humanitario ou de dedicação á causa publica.

§ 1.º A's causas de impossibilidade, previstas n'este artigo, são applicaveis as disposições do § 2.º do artigo 3.º

§ 2.° Cessando a impossibilidade, e verificado que seja esse facto pelo modo indicado no paragrapho antecedente, o empregado ou operario será restituido á actividade do serviço na mesma posição em que servia antes da reforma, ou n'outra equivalente e na primeira vacatura que se der.

Art. 5.° Perde o direito á reforma o empregado ou operario demittido ou despedido; porém, sendo outra vez readmittido, contar-se-ha o tempo do serviço anterior.

Art. 6.° No caso de reforma ordinaria a pensão do reformado é igual aos dois terços do vencimento ou salario do ultimo logar exercido durante ao menos cinco annos, mas nunca superior a 600 reis diarios.

§ unico. Quando o vencimento na actividade seja só por dias uteis, tambem será assim a pensão de reforma.

Art. 7.° Nas reformas extraordinarias as pensões são:

1.° De um terço do vencimento ou salario, nos casos dos n.os 1.° e 2.° do artigo 4.° com o augmento de 2 1/2 por cento no primeiro, e de 1 2/3 por cento no segundo caso, por anno de serviço ou trabalho a mais do minimo ali designado e até quarenta annos;

2.° No caso do n.° 3.° do artigo 4.°, a pensão será igual a dois terços do vencimento da actividade.

§ unico. A disposição ultima do artigo 6.° é applicavel em todos os casos previstos n'este artigo.

Art. 8.° Para os effeitos dos dois artigos antecedentes só se considera o vencimento ou salario principal com exclusão de gratificações, supplementos, ajudas de custo, augmentos por diuturnidade de serviço ou outras retribuições accessorias de qualquer natureza.

Art. 9.° A reforma póde ser concedida a pedido do interessado ou por determinação do governo, independentemente de solicitação d'aquelle.

§ 1.° Em qualquer hypothese o despacho de reforma conterá as causas e condições d'esta, bem como a designa-

ção da pensão concedida, e não surtirá effeito de pagamento da pensão, emquanto não tiver obtido o *visto* do tribunal de contas, reconhecendo a legalidade da reforma, e o seu cabimento dentro do fundo disponivel da caixa de reformas.

§ 2.° Emquanto o *visto* não for concedido não póde ser provido o logar exercido pelo pensionista.

§ 3.° O governo dará todos os annos conta ás côrtes das reformas que tiver concedido.

Art. 10.° Os empregados e os operarios reformados perdem as respectivas pensões de reforma nos mesmos casos em que os outros empregados do estado perdem as de aposentação.

Art. 11.° As pensões de reforma só podem ser penhoradas nos mesmos casos que os vencimentos ou salarios da actividade.

Art. 12.° A pensão de reforma não póde ser accumulada com qualquer outra retribuição paga pelos cofres do estado, quando da accumulação resulta quantia igual ou superior ao vencimento ou salario da actividade.

Art. 13.° A importancia das quotas pagas pelos empregados ou operarios que se impossibilitem antes de completos dez annos de serviço, e que não estejam nos casos do n.° 3.° do artigo 4.°, bem como a dos que forem exonerados ou despedidos por conveniencia do serviço, independente do procedimento dos interessados, serão restituidas aos interessados ou suas familias com o vencimento do juro accumulado de 3 por cento ao anno.

Art. 14.° A cobrança das quotas é feita por desconto na folha ou recibos dos vencimentos de qualquer especie, e a sua importancia será entregue mensalmente na caixa de reformas.

§ unico. Quando os operarios sejam remunerados por meio de tarefas ou empreitadas as quotas recairão sobre os lu-

cros d'esses contractos, que não poderão nunca ser reputados inferiores ao salario normal.

Art. 15.º A administração da caixa de reformas é confiada á direcção da caixa economica portugueza, nos termos da lei de 15 de julho de 1885.

Art. 16.º Os fundos da caixa de reformas dividem-se:

1.º Em fundo permanente e indefinido formado pela capitalisação de 10 por cento do fundo disponivel, pelos saldos d'esse fundo, e por qualquer quantia proveniente de multas ou descontos pagos pelos empregados e operarios de que trata este decreto.

2.º Em fundo disponivel resultante:

a) Do subsidio annual que as côrtes fixarem: *b)* Das quotas dos interessados; *c)* Do rendimento do fundo permanente, tudo liquido dos 10 por cento destinados ao fundo permanente.

Art. 17.º Os fundos da caixa de reformas, á medida que forem capitalisados, serão convertidos em titulos de divida publica perpetua averbados á caixa de reformas.

Art. 18.º O dinheiro pertencente á caixa de reformas será depositado na caixa geral de depositos, e ali vencerá o juro concedido aos depositos voluntarios. A administração da caixa de reformas só conservará em cofre a quantia absolutamente indispensavel para os pagamentos correntes.

Art. 19.º Constituem receita da caixa de reforma além do subsidio e quotas;

1.º Os descontos de vencimentos ou salarios, ou de multas por motivo de licença e de faltas não justificadas;

2.º Quaesquer donativos ou legados.

Art. 20.º O governo proporá annualmente ás côrtes o subsidio que ha de ser concedido á caixa de reformas. Para o anno corrente o subsidio consistirá nos juros que produzirem os titulos de divida publica em que forem convertidos os lucros liquidos da caixa geral de depositos no anno

economico de 1885-1886, ainda não applicados em titulos averbados a favor da caixa nacional de aposentações.

Art. 21.° As reformas já concedidas em virtude dos artigos 244.° a 249.° do regulamento do arsenal da marinha, ou pelo effeito da disposição da lei de 3 de julho de 1878 continuarão a ser pagos pelo thesouro publico.

Art. 22.° É garantida a reforma a que tenham direito os actuaes empregados menores e os operarios dos estabelecimentos fabris da direcção geral de artilheria e do arsenal da marinha, nos precisos termos da legislação em vigor.

Art. 23.° O governo fará os regulamentos necessarios para a plena execução do presente decreto, e dará conta ás côrtes da disposição d'elle que careçam de sancção legislativa.

Art. 24.° Ficam revogadas as disposições em contrario.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, e os ministros e secretarios d'estado das outras repartições, assim o tenham entendido e façam executar. Paço, 17 de julho de 1886.— REI. — *José Luciano de Castro — Francisco Antonio da Veiga Beirão — Marianno Cyrillo de Carvalho — Visconde de S. Januario — Henrique de Macedo — Henrique de Barros Gomes — Emygdio Julio Navarro.*

Tabella das quotas por idades a que se refere o decreto n.º 1 sobre aposentações

Idades	Percentagem
Até 25 annos	5 por cento
De 25 a 30 annos	6 »
De 30 a 35 annos	7 »
De 35 a 40 annos	8 »
De 40 a 45 annos	10 »

Paço, em 17 de julho de 1886.—*Marianno Cyrillo de Carvalho.*

Tabella das quotas por idades a que se refere o decreto n.º 2 sobre reformas

Idades	Percentagem
Até 25 annos	5 por cento
De 25 a 30 annos	6 »
De 30 a 35 annos	7 »
De 35 a 40 annos	8 »
De 40 a 45 annos	9 »

Paço, em 17 de julho de 1886.—*Marianno Cyrillo de Carvalho.*

Diario do Governo n.º 163 de 23 de julho de 1886.

Decreto de 23 d'agosto de 1886, regulamentando o Decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886

Direcção geral da contabilidade publica

REPARTIÇÃO CENTRAL

Sendo urgente regular a execução do decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho de 1886, na parte em que estabelece as receitas proprias da caixa de aposentação, provenientes das quotas dos empregados e funccionarios com direito á mesma aposentação ou jubilação, ao tempo da promulgação do citado decreto, de fórma que essas receitas se tornem effectivas; e bem assim estabelecer o modo pratico de realisar o recurso estabelecido no § 1.º do artigo 10.º, e emquanto não estiver definitivamente constituida a administração da dita caixa: hei por bem, em nome de El-Rei, em conformidade do disposto no artigo 34.º do citado decreto, determinar o seguinte:

Artigo 1.º Os empregados e funccionarios civis de qualquer ordem e natureza, que, nos termos da legislação vigente ao tempo da promulgação da carta de lei de 15 de julho de 1885 e do decreto n.º 1 com força de lei de 17 de julho de 1886 tinham direito á aposentação ou jubilação sem exercicio, e que são desde já obrigados a pagar quota para a caixa de aposentação, contribuirão nos termos seguintes:

1.º Com a quota de 4 por cento dos seus vencimentos nos termos do artigo 7.º do regulamento de 23 de dezembro de 1885, todos os empregados nomeados depois de 4 de janeiro de 1886 que tiverem satisfeito ás prescripções do artigo 8.º do mesmo regulamento e que não se acharem comprehendidos na disposição do n.º 3.º d'este artigo, porque, n'esse caso, a deducção será de 5 por cento e nos termos do mesmo numero;

2.° Com a quota de 4 por cento, só do acrescimo do vencimento, nos termos do numero anterior, os funccionarios de que trata o artigo 9.° do citado regulamento de 23 de dezembro de 1885, que igualmente não estiverem comprehendidos nas disposições do n.° 3.° d'este artigo, porque n'esse caso a deducção será tambem de 5 por cento e nos termos do mesmo numero;

3.° Com a quota de 5 por cento de todos os vencimentos fixos ou eventuaes, de quálquer natureza que sejam, excepto abonos para despezas de jornada, para renda das casas das repartições ou para despezas d'estas, todos os empregados civis nomeados depois do dia 31 de julho ultimo ou que por effeito de reorganisação ou reforma legal dos serviços ou repartições recebam melhoria de vencimentos, depois da mesma data;

4.° Com a quota de 5 por cento do augmento de vencimento, nos termos do numero antecedente, que tiverem os empregados transferidos, promovidos ou augmentados em vencimento por diuturnidade de serviço;

5.° Com a quota de 5 por cento de todos os vencimentos os escrivães de fazenda que, á data da publicação do decreto com força de lei de 23 de julho de 1886, tivessem cinco annos de exercicio, para gosarem do beneficio na pensão de aposentação concedida pelo artigo 20.° do mesmo decreto;

6.° Com a quota de 5 por cento de todos os vencimentos os empregados nomeados depois de 4 de janeiro de 1886, que não fizeram a declaração de que trata o artigo 8.° do já citado regulamento de 23 de dezembro de 1885.

§ 1.° Os empregados que nos termos dos n.os 1.° e 2.° d'este artigo já eram obrigados a contribuir com 4 por cento de todos ou de parte dos seus vencimentos para a caixa de aposentação, pagarão se não estiverem compre-

hendidos nas disposições do n.º 3.º, pelo augmento de vencimento que tiveram ou tiverem depois do 1.º de julho de 1886, 5 por cento, mas continuarão tambem a contribuir com 4 por cento, deduzidos da somma correspondente aos vencimentos anteriores, e nos termos dos n.ºs 1.º e 2.º d'este artigo.

§ 2.º Será sempre applicada a deducção de 5 por cento dos vencimentos totaes, nos casos do n.º 3.º d'este artigo, seja qual fôr a data em que os empregados tenham sido nomeados.

Artigo 2.º Pelas differentes repartições da direcção geral da contabilidade publica, nos diversos ministerios, serão expedidas immediatamente as ordens necessarias para que o pagamento das quotas devidas, a começar do mez de agosto corrente, seja feito por desconto nas folhas ou recibos de vencimentos dos respectivos funccionarios a datar d'este mesmo mez.

Artigo 3.º Aos magistrados, tanto judiciaes como do ministerio publico de qualquer graduação, que devam pagar quota para a caixa de aposentação, nos termos d'este decreto, serão os descontos feitos em relação aos vencimentos pagos directamente pelo estado e mencionados no orçamento, visto que só por esses vencimentos é fixada a pensão das aposentações.

Artigo 4.º Aos empregados do serviço interno das alfandegas a deducção, nos termos do artigo anterior, será feita em relação aos vencimentos pagos pelo estado e emolumentos que lhe forem distribuidos; constituindo essa deducção total receita da caixa de aposentação.

§ 1.º A pensão da aposentação d'estes empregados, comprehendendo ordenado e emolumentos, será paga pela caixa, ficando, porém, entendido que o cofre dos emolumentos aduaneiros entregará ao da caixa de aposentação, da qual constituirá receita disponivel, a parte dos emolu-

*

mentos que competirem aos individuos que forem aposentados a datar de 31 de julho de 1886, e bem assim o desconto mensal que se fizer nos emolumentos dos empregados, nos termos d'este decreto, a datar da sua execução.

§ 2.° A parte dos emolumentos, complementar da pensão de aposentação, será calculada nos termos dos artigos applicaveis do decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho ultimo, proporcionalmente ao que estabelecem o capitulo 5.° e a tabella n.° 9 do decreto n.° 3 de 17 de setembro de 1885, de fórma que essa parte nunca exceda a 50 por cento dos emolumentos, que respectivamente receberem os empregados em effectividade de serviço, do modo seguinte:

1.° No caso de aposentação ordinaria a percentagem sobre os emolumentos será de 50 por cento;

2.° No caso de aposentação extraordinaria essa percentagem:

a) na hypothese do n.° 1.° do artigo 4.° do decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho ultimo será de 15 por cento, com o augmento de $2\ ^1/_3$ por cento por anno de serviço, além de quinze até trinta annos;

b) na hypothese do n.° 2 do mesmo artigo 4.° será de 40 por cento com o augmento de $^1/_2$ por cento por anno de serviço além de dez a trinta annos; e

c) na hypothese do n.° 3 do mesmo artigo 4.° será de 15 por cento até cinco annos de serviço e mais $1\ ^2/_5$ por cento por anno de serviço até trinta annos.

Artigo 5.° A importancia da quota a descontar será fixada pelo chefe do serviço ou da repartição, escola ou estabelecimento onde o empregado ou funccionario servir, em vista das instrucções expedidas, nos termos d'este decreto, pela respectiva repartição da direcção geral da contabilidade publica.

§ 1.° No caso em que o funccionario se não conforme

com o desconto por entender que a lei lhe não é correctamente applicada, póde recorrer para o ministro da fazenda, por intermedio de um conselho especial, composto do director geral da contabilidade publica e dos dois chefes de repartição da mesma direcção ou de qualquer outra das do ministerio da fazenda, escolhidos pelo ministro, conselho que informará sobre a reclamação, devendo remetter depois todo o processo ao conselheiro procurador geral da corôa e fazenda, para que, em vista do parecer d'este magistrado sobre a questão, o ministro resolva como fôr de justiça.

§ 2.° O recurso de que trata o § 1.° não tem effeito suspensivo do desconto: este far-se-ha até que o ministro resolva. Modificando o ministro a importancia do desconto restituir-se-ha ao empregado o que a mais lhe houver sido descontado, ou encontrar-se-ha no pagamento das quotas futuras.

Artigo 6.° Para os effeitos do artigo 1.°, a epocha das nomeações dos empregados, mesmo para as que dependem de confirmação posterior, conta-se da data em que os funccionarios começaram ou começarem a servir, ainda só com nomeação legal provisoria. As quotas que porventura hajam pago, ou tenham de pagar, para a caixa de aposentação, ser-lhe-hão restituidas, se os empregados não forem confirmados no exercicio de seus empregos.

Artigo 7.° O processo da aposentação dos magistrados judiciaes será regulado pelas disposições applicaveis da legislação em vigor, devendo o conselheiro do supremo tribunal de justiça, a quem fôr distribuido o processo respectivo, providenciar, nos termos que julgar convenientes, que pela direcção geral da contabilidade publica se mande proceder ao exame medico de que trata o artigo 4.° do decreto de 26 de julho ultimo em execução do § 2.° do artigo 3.° do citado decreto com força de lei n.° 1 de 17 do mesmo mez.

Artigo 8.º A importancia das quotas pagas pelos empregados e das demais deducções feitas nos respectivos vencimentos, que pertencem á caixa de aposentação, será escripturada nas contas publicas em separado, para ser entregue opportunamente á administração da mesma caixa.

§ 1.º Fica, porém, entendido que o producto d'essas quotas ou deducções não poderá ser applicado a vencimentos de aposentação, nos termos do decreto de 26 de julho de 1886, senão na parte que restar depois de deduzidos: 3:533$554 réis, correspondente a 10 por cento do juro do fundo da caixa nacional de aposentações de que trata o artigo 27.º do decreto com força de lei n.º 1 de 17 do mesmo mez, e ainda 10 por cento da totalidade das mesmas quotas ou deducções — afim de ficar intacto o fundo permanente da caixa de aposentação estabelecido pelo citado decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886.

§ 2.º Quando a parte do fundo disponivel da caixa de aposentação não chegar para o pagamento de novas aposentações, em processo, terão preferencia, mediante despacho do ministro da fazenda, pela seguinte ordem, no cabimento da somma disponivel:

1.º A pensão de qualquer aposentando com mais tempo de serviço effectivo;

2.º A pensão menor entre as que couberem a aposentandos com mais tempo de serviço;

3.º Em igualdade de importancia de pensões a relativa a individuo de maior idade; e

4.º Em igualdade de idades dos aposentandos, a pensão cujo processo, depois da aposentação decretada, primeiro tiver sido enviada á direcção geral da contabilidade publica.

§ 3.º Para compensar a despeza do thesouro com aposentações depois da publicação do decreto de 26 de julho ultimo, a junta do credito publico entregará no ministerio

da fazenda, os juros das inscripções de que trata o artigo 27.º do citado decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho ultimo, afim de que, opportunamente, pela direcção geral da contabilidade publica, se entregue á caixa das aposentações o saldo que houver, acompanhado das contas especiaes mandadas coordenar pelo referido decreto de 26 de julho de 1886.

Artigo 9.º Quando a aposentação de qualquer empregado provenha de determinação do governo, a direcção geral da contabilidade dará copia ao interessado, se tiver o exercicio do seu emprego em Lisboa, em vinte e quatro horas, do auto da conferencia medica, de que trata o artigo 4.º do decreto de 29 de julho ultimo, cobrando recibo da entrega.

§ 1.º Se o empregado ou funccionario se não conformar com o parecer da conferencia medica poderá, dentro em tres dias improrogaveis, usar do recurso que estabelece o mesmo artigo, declarando-o em requerimento feito ao Rei pela referida direcção geral da contabilidade publica, e indicando quaes são os facultativos, lentes da escola medico-cirurgica de Lisboa, que escolhe para comporem a nova junta medica.

§ 2.º Apresentado o requerimento, a direcção geral submetterá o recurso immediatamente ao ministro para este indicar os dois facultativos, que por parte do governo devem fazer parte da referida nova junta medica.

§ 3.º Feita esta nomeação a direcção geral, no dia util immediato, ou no mesmo, podendo ser, convocará a nova junta para se reunir sob a presidencia do director dos serviços ou da repartição a que o aposentado pertença, afim de examinar de novo o mesmo aposentado. O presidente d'esta nova junta, quando se tratar da aposentação de magistrado judicial, será o conselheiro do supremo tribunal de justiça a quem o respectivo processo tiver sido distri-

buido, e reunir-se-ha a mesma junta na hora e local que por esse presidente forem indicados.

§ 4.° O termo lavrado por esta junta será enviado á direcção geral da contabilidade, para os effeitos do artigo 4.° do decreto citado de 26 de julho ultimo.

§ 5.° Se o aposentando, em tres dias improrogaveis, não declarar que recorre do parecer da primeira junta medica, apresentando o respectivo requerimento, entender-se-ha que se conforma com a aposentação.

§ 6.° O aposentando poderá exigir que se lhe passe recibo da apresentação do requerimento de recurso, indicando o dia e hora em que o apresentou.

Artigo 10.° Para os effeitos do artigo 4.° do decreto de 26 de julho ultimo, quando o empregado a aposentar não tenha o exercicio do seu emprego em Lisboa, a junta medica a que se refere o § 2.° do artigo 3.° do decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho ultimo, poderá ser nomeada pelo respectivo governador civil do districto, por ordem do ministro da fazenda.

N'este caso, e quando a aposentação não tenha sido requerida pelo aposentando, o governador civil fará praticar todos os actos marcados nos §§ 1.° a 4.° do artigo antecedente, nos prasos marcados nos mesmos paragraphos, exactamente como o deveria fazer o director geral da contabilidade publica.

Artigo 11.° Os honorarios dos facultativos que compozerem as juntas de recurso, de que tratam os artigos 9.° e 10.°, d'este decreto, quando esta se conforme com o parecer da primeira, serão pagos pelo interessado; no caso que este os não satisfaça, ser-lhe-hão integralmente descontados no primeiro vencimento que o thesouro ou a caixa das aposentações houver de lhe fazer.

O conselheiro d'estado, presidente do conselho de mi-

nistros, e os ministros e secretarios d'estado de todas as repartições, assim o tenham entendido e façam executar.

Paço, aos 23 de agosto de 1886. — PRINCIPE REGENTE.—*José Luciano de Castro—Francisco Antonio da Veiga Beirão—Marianno Cyrillo de Carvalho—Visconde de S. Januario—Henrique de Barros Gomes—Emygdio Julio Navarro.*

Determinando o decreto com força de lei n.º 1 de 17 de julho ultimo que creou a caixa geral de aposentação, que a administração d'ella seja confiada á respectiva assembléa geral e a uma direcção eleita pela mesma assembléa;

Considerando que nos termos do artigo 26.º do mesmo decreto podem pertencer á assembléa geral todos os empregados civis do estado, que paguem pelo menos 12$000 réis de quota annual, e sendo certo que igual direito compete a todos os funccionarios civis que, sem pagamento de quota, têem a aposentação garantida por força das disposições do mesmo decreto;

Considerando assim que a aposentação se acha assegurada a todos os empregados que a ella tinham direito na epocha da promulgação do citado decreto, mesmo os nomeados depois de 4 de janeiro de 1886, que houvessem satisfeito ás prescripções do regulamento de 23 de dezembro anterior;

Considerando que é urgente estabelecer a administração da caixa de aposentação, fazendo installar os respectivos corpos gerentes, para que tenha plena execução o mesmo decreto de 17 de julho ultimo: hei por bem, em nome de El-Rei, determinar o seguinte:

Artigo 1.º E' convocada para o dia 30 de setembro do corrente anno a assembléa geral da caixa de aposentação, a qual se reunirá em Lisboa, na sala do monte pio official.

Artigo 2.° Podem fazer parte da assembléa geral da caixa de aposentação:

1.° Os funccionarios a quem o decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho de 1886 manteve o direito de aposentação e que a ella tinham jus nos termos da legislação vigente n'essa data; comtanto que paguem ou devessem pagar, nos termos geraes do mesmo decreto, pelo menos 12$000 annuaes de quotas para a dita caixa de aposentação;

2.° Todos os funccionarios comprehendidos na disposição do § unico do artigo 1.° do citado decreto, que declararem sujeitar-se á disposição do mesmo paragrapho, e que paguem pelo menos a mesma quota annual de 12$000 rs.

Art. 3.° Os funccionarios, nos termos do artigo antecedente, que pretenderem fazer parte da assembléa geral, apresentarão em qualquer dos dias, que decorrerem desde 1 até 20 de setembro, á direcção geral da contabilidade publica no ministerio da fazenda, o pedido para fazerem parte da assembléa, demonstrando o direito que têem para esse pedido. Reconhecido o direito, a direcção geral da contabilidade publica entregará ao reclamante uma senha com o nome e categoria do funccionario, senha que dará direito a este, de fazer parte da assembléa geral da caixa de aposentação.

§ unico. As duvidas que a direcção geral da contabilidade publica tenha na concessão de qualquer senha de entrada na assembléa geral serão resolvidas pelo ministro da fazenda até 25 do mesmo mez.

Art. 4.° A assembléa geral compor-se-ha dos funccionarios munidos das senhas de admissão, que tiverem sido expedidas pela direcção geral da contabilidade publica. Esta terá enviado antecipadamente ao presidente da direcção do monte pio official, que servirá de presidente da assembléa preparatoria da caixa de aposentação, uma relação dos funccionarios aos quaes tiver entregue a senha de

admissão. Por essa relação será feita a chamada dos funccionarios com direito a fazer parte da assembléa.

Art. 5.° Reunidos os funccionarios de que trata o artigo antecedente, pelo menos em numero de cincoenta, e sob a presidencia provisoria do presidente da direcção do monte pio official, este nomeará dois secretarios interinos e fará proceder ao escrutinio para a eleição da mesa, nos têrmos dos artigos 21.° e 22.° do decreto com força de lei n.° 1 de 17 de julho de 1886. Corrido o escrutinio e eleitos um presidente, um vice-presidente, dois secretarios e dois vice-secretarios, o presidente interino dará posse aos nomeados, cessando as funcções da mesa provisoria.

Art. 6.° Em seguimento, a assembléa fará a eleição do thesoureiro e secretario da direcção, nos termos dos artigos 22.° e 23.° do mesmo decreto n.° 1 de 17 de julho de 1886.

Art. 7.° A assembléa geral nomeará tambem uma commissão especial para redigir e submetter á approvação do governo o projecto dos estatutos por que a caixa de aposentação se ha de reger, podendo fazer parte d'essa commissão especial os membros da mesa da assembléa geral e da direcção.

Art. 8.° Pelo ministerio dos negocios da fazenda serão dadas as providencias necessarias para a execução d'este decreto.

O conselheiro d'estado, presidente do conselho de ministros, e os ministros e secretarios d'estado de todas as repartições assim o tenham entendido e façam executar. Paço, aos 23 de agosto de 1886. — PRINCIPE REGENTE. — *José Luciano de Castro* — *Francisco Antonio da Veiga Beirão* — *Marianno Cyrillo de Carvalho* — *Visconde de S. Januario* — *Henrique de Barros Gomes* — *Emygdio Julio Navarro.*

(*Diario do Governo* n.° 192 de 26 d'agosto de 1886).

Carta de lei de 1 de setembro de 1887 regulando o vencimento d'exercicio aos professores d'instrucção superior

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

DOM LUIZ, por graça de Deus, Rei de Portugal e dos Algarves, etc. Fazemos saber a todos os nossos subditos, que as côrtes geraes decretaram e nós queremos a lei seguinte:

Artigo 1.° Os vencimentos dos lentes cathedraticos e professores proprietarios dos estabelecimentos de instrucção superior dependentes do ministerio do reino constam de duas partes, uma permanente ou de categoria e outra eventual ou de exercicio. Constitue o vencimento permanente ou de categoria o ordenado fixo, que se acha estabelecido pela legislação actual para os lentes e professores de cada um dos indicados estabelecimentos. O vencimento eventual ou de exercicio consiste n'uma gratificação mensal de 43$000 réis.

§ 1.° O vencimento eventual ou de exercicio é pago unica e exclusivamente aos lentes e professores que exercem o effectivo serviço de actos, exames e regencia de cadeira na faculdade, escola ou instituto a que pertencem. Nenhum outro serviço publico de qualquer natureza dá direito a este vencimento para cuja contagem as faltas dos professores não podem ser abonados por motivo algum, nem ainda por doença.

§ 2.° Os lentes e professores que accumularem com o seu serviço a regencia de uma ou mais cadeiras da mesma faculdade ou escola, recebem, durante os dias que servirem, a parte do vencimento de exercicio que deixar de ser abonado ao professor substituido, alem da gratificação

de effectividade que lhes competir nos termos do paragrapho antecedente.

§ 3.º Quando para occorrer á interrupção do ensino seja chamada pessoa idonea de fóra da escola ou estabelecimento, nos termos da legislação em vigor, será abonado a essa pessoa o vencimento de exercicio durante o tempo que servir.

Art. 2.º Os lentes e professores substitutos de instrucção superior em serviço effectivo de actos, exames e regencia de cadeira, recebem desde o primeiro dia de exercicio o respectivo ordenado fixo de substituto e o vencimento do exercicio pelo tempo que servem, na conformidade do disposto n'esta lei.

§ unico. No caso de accumulação de regencia de duas ou mais cadeiras é applicavel aos lentes e professores substitutos a disposição do § 2.º do artigo antecedente.

Art. 3.º O vencimento de exercicio é de 43$000 réis por mez completo de effectivo serviço. As fracções do mez contam-se proporcionalmente aos dias de serviço, não se incluindo n'essa contagem as férias do Natal e Paschoa, ou quaesquer outros feriados superiores a cinco dias consecutivos.

Art. 4.º Para os lentes substitutos ou auxiliares que dirigem salas de estudo ou trabalhos práticos o vencimento de exercicio é de 25$000 réis por mez de serviço effectivo, não podendo accumular-se com o da regencia de cadeira, nem as salas de estudo ou trabalhos práticos prolongar-se mais tempo que a regencia da cadeira.

Art. 5.º Os lentes que sirvam em duas ou mais escolas só por uma d'ellas poderão receber o vencimento de exercicio, creado por esta lei, além dos vencimentos de qualquer natureza a que já hoje tenham direito.

Art. 6.º Os lentes proprietarios e substitutos de ensino superior, que no tempo lectivo estiverem ausentes das ter-

ras em que devem exercer o magisterio, não recebem o ordenado de categoria, salvo justificando a ausencia, com licença ou impedimento legal.

§ 1.º Só é legal a licença concedida pelo chefe do estabelecimento respectivo até trinta dias, durante o anno lectivo, e pelo governo seja qual fôr o praso.

§ 2.º Só é legal o impedimento do lente ausente, quando desempenha alguma commissão inherente ao seu cargo por virtude de lei ou exerce funcções legislativas.

§ 3.º A licença por mais de seis mezes, ainda que por motivo de molestia, faz perder o direito ao ordenado de categoria. A licença por mais de dous mezes importa o desconto de um terço do ordenado de categoria.

§ 4.º A licença póde em qualquer d'estas hypotheses ser prorogada pelo governo sem prejuizo do ordenado de categoria, precedendo exame de facultativos nomeados pelo governo.

Art. 7.º Os lentes e substitutos de ensino superior que acceitarem do poder executivo logares de commissão incompativeis com o serviço do magisterio, e que não sejam considerados por lei como de exercicio effectivo no professorado, deixam vagas as suas cadeiras ou substituições; mas se forem exonerados da commissão, vão tomar no magisterio o logar que por antiguidade lhes pertenceria se n'elle houvessem persistido, com o ordenado correspondente, logo que as vacaturas do quadro permittam abonar-lh'o.

§ 1.º Aos lentes e substitutos que forem providos em logares de commissão, que preferirem o magisterio, é concedido o praso de tres mezes para o declararem ao governo, sob pena de se entender que optam pela commissão.

§ 2.º O governo fica auctorisado para declarar no decreto de nomeação, ou ainda depois, antes do provimento da vacatura, que o nomeado é isento das disposições d'este

artigo e seu § 1.º por um espaço de tempo não excedente a tres annos.

Art. 8.º Para occorrer ás despezas creadas pela presente lei, cobrar-se-hão nos diversos estabelecimentos de instrucção superior, dependentes do ministerio do reino, mais 36 por cento sobre os direitos de matriculas e cartas, designados na tabella approvada por decreto de 26 de junho de 1880, e na carta de lei de 21 de julho de 1885, artigo 1.º, § 2.º

§ unico. Se a receita proveniente d'este addicional não chegar para as despezas creadas por esta lei, será a differença supprida pelas quantias que sobrarem dos differentes capitulos de instrucção publica descriptos no orçamento geral do estado.

Art. 9.º Ao vencimento de exercicio concedido n'esta lei é applicavel quanto aos lentes e professores nomeados antes do decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886, o que dispõe a ultima parte do artigo 14.º d'este decreto, relativamente ao excesso de vencimentos proveniente de promoção ou diuturnidade de serviço.

Art. 10.º Fica revogada a legislação contraria a esta.

Mandâmos portanto a todas as auctoridades, a quem o conhecimento e execução da referida lei pertencer, que a cumpram e a façam cumprir e guardar tão inteiramente como n'ella se contém.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, a faça imprimir, publicar e correr. Dada no paço da Ajuda, em 1 de setembro de 1887.—EL-REI, com rubrica e guarda.—*José Luciano de Castro.*—(Logar do sêllo grande das armas reaes.)

Carta de lei pela qual Vossa Magestade, tendo sanccionado o decreto das côrtes geraes de 6 de agosto ultimo,

que estabelece o vencimento de exercicio para os lentes e professores proprietarios dos estabelecimentos de instrucção superior dependentes do ministerio do reino; regula o modo e condições em que deve ser abonado o alludido vencimento, tanto em relação áquelles lentes e professores como aos substitutos e auxiliares que tiverem regencia de cadeiras; e fixa algumas regras relativas a licenças e logares de commissões; manda cumprir e guardar o referido decreto como n'elle se contém, pela fórma retro declarada.

Para Vossa Magestade ver. — *Antonio Germano Ferreira e Silva* a fez.

(*Diario do Governo*, n.º 201, de 9 de setembro de 1887).

Decreto de 17 de fevereiro de 1887 modificando o decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865

Direcção Geral d'Instrucção Publica

1.ª REPARTIÇÃO

Tomando em consideração as representações de alguns estabelecimentos de instrucção superior sobre a necessidade de se modificar em varias disposições o decreto de 22 de agosto de 1865, que regula os concursos aos logares do magisterio superior, dependentes do ministerio do reino; e

Conformando-me com as propostas do conselho superior de instrucção publica ácerca do assumpto, e depois de ouvir a secção permanente do mesmo conselho:

Hei por bem ordenar o seguinte:

I. O numero V do artigo 8.º, § 1.º do decreto de 22 de agosto de 1865 é substituido pela fórma seguinte:

«V. Diploma de um curso completo de instrucção superior obtido nas faculdades de mathematica ou de philosophia da universidade de Coimbra, na escola polytechnica de Lisboa ou na academia polytechnica do Porto; ou diploma de um curso das academias de bellas artes; ou diploma do ensino do 2.° grau, ou de algum dos cursos especiaes, dos institutos industriaes, em que se comprehenda a frequencia e exame de desenho, para a admissão ao concurso das cadeiras de desenho na universidade, na escola polytechnica e na academia polytechnica.»

II. A disposição do artigo 12.°, sob a epigraphe «Faculdade de mathematica», é substituida d'este modo:

«1.ª Lição: algebra superior, calculo differencial e integral, geometria analytica, mechanica racional e physica mathematica.»

«2.ª Lição: astronomia, geodesia e mechanica celeste.»

III. A disposição do mesmo artigo 12.°, sob a epigraphe «Escola polytechnica», e com referencia ás lições do concurso para as cadeiras de mineralogia e geologia, e de montanistica, docimasia e metallurgia, é substituida d'esta fórma:

«Para a cadeira de mineralogia e geologia: uma em mineralogia e outra em geologia.»

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, assim o tenha entendido e faça executar. Paço da Ajuda, em 17 de fevereiro de 1887. — REI. — *José Luciano de Castro.*

(Diario do Governo, n.° 45, de 28 de fevereiro de 1887).

Decreto de 5 de janeiro de 1888, ampliando o n.º 4.º, § 1.º do art. 8.º do decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865

Tomando em consideração as razões expostas pelo Conselho Superior de instrucção publica no seu relatorio geral de 15 d'outubro de 1887, sobre a necessidade de se ampliar o disposto no n.º 4.º, § 1.º do artigo 8.º do decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865, por modo que os alumnos habilitados na Academia Polytechnica do Porto não sejam inhibidos de concorrer aos logares do magisterio, na secção de philosophia da mesma Academia: Hei por bem decretar o seguinte:

Artigo 1.º São admittidos ao concurso para provimento dos logares do magisterio na secção de philosophia da Academia Polytechnica do Porto os candidatos que apresentarem documentos por onde provem ter sido approvados nos actos das seguintes cadeiras da referida Academia:

1.ª Geometria analytica, algebra superior e trigonometria espherica;

2.ª Calculo differencial e integral;

3.ª Mechanica;

6.ª Physica;

7.ª Chimica inorganica;

8.ª Chimica organica e analyse chimica;

9.ª Mineralogia e geologia;

10.ª Botanica;

11.ª Zoologia.

Os candidatos deverão tambem apresentar certidão de approvação nas lições de ornato e paizagem professadas na cadeira de desenho, e certidão dos actos de quaesquer outras cadeiras physico-chimicas ou naturaes, que de futuro alli venham a crear-se,

Art. 2.º Fica por este modo ampliado o n.º 4.º, § 1.º do artigo 8.º do decreto regulamentar de 22 de agosto de 1865.

O presidente do conselho de ministros, ministro e secretario d'estado dos negocios do reino, o tenha assim entendido e faça executar. Paço d'Ajuda, em 5 de janeiro de 1888.—REI.—*José Luciano de Castro.*

(*Diario do Governo* n.º 7 de 10 de janeiro de 1888).

A proposta a que se refere este decreto foi feita no Conselho Superior de Instrucção Publica na sua sessão de outubro de 1887 pelo delegado da Academia Polytechnica, Dr. José Diogo Arroyo.

Programmas

PROGRAMMAS

I CADEIRA — Algebra superior e geometria analytica

Lente. *L. I. Woodhouse*. Seis horas semanaes

ALGEBRA

I

1. *Determinantes.* — Noções preliminares. Disposição par, disposição impar. Permutação de dous elementos. Permutação circular. Definição do determinante. Notação. Ordem do determinante. Termo principal. Propriedades geraes dos determinantes. Determinantes menores. Desenvolvimento dos determinantes, regra de Sarrus. Calculo dos determinantes. Resolução das equações do primeiro grau a muitas incognitas. Producto de dous determinantes.

2. *Generalisação da noção de quantidade.* — Propriedades combinatorias das operações de arithmetica. Numeros irracionaes. Introducção da ideia de direcção no symbolo representativo da grandeza. Quantidades geometricas. Módulo, argumento. Definição das operações geometricas. Verificação das propriedades combinatorias das operações da arithmetica. Quantidades imaginarias. Interpretação geometrica de $\sqrt{-1}$. Notação algebrica e trigonometrica das quantidades imaginarias. Operações sobre imaginarios. Formula de Moivre. Raizes da unidade.

3. *Series.* — Series convergentes e divergentes. Series de termos reaes. Regras de convergencia. — Series de termos imaginarios. Series absolutamente convergentes. Operações sobre series. Series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas da variavel. Circulo de convergencia. Series uniformemente convergentes.

4. *Productos infinitos.* — Condição de convergencia. Limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quando n cresce indefinidamente.

5. *Fracções continuas.* — Definição. Transformação da fracção em serie. Estudo do caso em que os numeradores das integrantes são a unidade.

6. *Principios geraes da theoria das funcções.* — Continuidade e descontinuidade. Theoremas sobre continuidade. Funcções uniformes e multiformes.

Funcção algebrica inteira. — Formula de Taylor. Definição e formação das derivadas. Continuidade da funcção inteira. Decomposição (1) da funcção em factores lineares. Funcções racionaes fraccionarias. Sua decomposição.

Funcção exponencial. Sua periodicidade. A funcção exponencial é uniforme e continua em todo o plano. Funcção inversa ou logarithmica. Ramos da funcção. Continuidade.

Funcções circulares directas e inversas. Ramos e pontos criticos. Continuidade.

II

7. *Theoria geral das equações algebricas.* — Theoremas preliminares. A equação algebrica tem pelo menos uma raiz. Decomposição do seu primeiro membro em n factores lineares. A equação algebrica de grau n tem n raizes. Composição dos coefficientes. Divisores algebricos. Reducção da equação com raizes eguaes. Soluções communs a duas equações. Transformação das equações. Irreductibilidade.

8. *Separação das raizes das equações numericas.* — Resolução algebrica e numerica das equações. Limites dos módulos das raizes e limites das raizes reaes de uma equação de coefficientes reaes. Theoremas relativos á substituição da variavel por dois numeros e corollarios. Theorema sobre a mudança de signal de $\frac{F(z)}{F'(z)}$ quando $F(Z)$ passa por zero. Theorema de Rolle. Theorema de Sturm. Applicação ás condições de realidade das raizes de uma equação de grau dado.

Separação das raizes pelo theorema de Sturm.

Separação das raizes pelo methodo de Lagrange.

Theorema de Cauchy e separação das raizes imaginarias.

9. *Calculo das raizes.* — Raizes commensuraveis. Raizes incommensuraveis. Methodo de Newton e Fourier. Raizes imaginarias.

10. *Funcções symetricas.* — Eliminação.

11. *Resolução algebrica das equações.* — Equação do terceiro grau. Equação do quarto grau.

TRIGONOMETRIA ESPHERICA

Formulas fundamentaes. — Resolução dos triangulos.

(1) A demonstração dá-se na theoria das equações.

GEOMETRIA ANALYTICA PLANA

I

1. *Ponto.* — Coordenadas cartesianas. Coordenadas polares. Distancia entre dois pontos. Transformação de coordenadas. Classificação das linhas planas.

2. *Linha recta.* — Equação da linha recta. A equação do primeiro grau representa uma recta. Differentes formas da equação da linha recta. Recta que passa por dois pontos dados. Condições para que tres pontos estejam em linha recta. Angulo de duas rectas. Condições de parallelismo e perpendicularidade. Intersecção de duas rectas. Condição para que tres rectas sejam concorrentes. Equação de uma recta que passa pela intersecção de outras duas. Distancia de um ponto a uma recta. Recta imaginaria. Equações representando um systema de rectas. Generalidades sobre equações que se decompõem em factores.

3. *Circulo.* — Equação em coordenadas cartesianas e polares. Determinação do raio e coordenadas do centro. Circulo que passa por dois e tres pontos. Tangente e polar.

4. *Curvas do segundo grau.* — Discussão da equação do segundo grau. Identidade das curvas do segundo grau com as secções conicas. As curvas do segundo grau são em geral determinadas por cinco condições. Conica que passa por dois pontos dados. Conica que passa por quatro pontos dados. Relação entre seis pontos d'uma conica. Definição das conicas pela relação das distancias de cada um dos seus pontos a uma recta e a um ponto. Directris e foco.

Centro, diametros e eixos. Tangente e polar.

5. *Ellipse.* — Estudo da ellipse. Focos e directrises. Raios vectores. Tangente e normal. Diametros. Diametros conjugados. Cordas supplementares.

6. *Hyperbole.* — Estudo da hyperbole. Focos e directrises. Raios vectores. Tangente e normal. Diametros. Diametros conjugados. Cordas supplementares. Asymptotas.

7. *Parabola.* — Estudo da parabola. Foco e directris. Tangente e normal. Diametros.

II

COMPLEMENTOS

8. *Applicação do methodo da notação abreviada á linha recta.* — Da equação $\alpha - k\beta = 0$. Applicação do methodo á demonstração de theoremas e resolução de problemas. Relação harmonica e anharmonica. Systema de rectas homographicas. Coordenadas trilineares e tangenciaes.

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO

9. *Ponto recto e plano.* — Coordenadas do ponto no espaço. Distancia entre dois pontos. Coordenadas polares de um ponto. Transformação de

coordenadas. Superficies e linhas. Equações da recta e do plano. Problemas sobre a recta e o plano.

10. *Superficies cylindricas conicas e de revolução.*
11. *Equação geral do segundo grau.*

II Cadeira — Circulo differencial e integral; calculo das differenças e das variações

Lente. *Dr. F. Gomes Teixeira.* Seis horas semanaes

Na exposição das doutrinas que são comprehendidas n'esta cadeira, o respectivo lente segue os **Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal,** que são publicados n'este *Annuario*, e de que elle é auctor.

III Cadeira — Mecanica racional e cinematica

Lente *J. A. Albuquerque.* Seis horas semanaes

I—MECANICA RACIONAL

Noção de movimento e de força: objecto da mecanica; distincção entre mecanica racional e mecanica physica. Divisão da mecanica racional em Phoronomia, Estatica e Dynamica. Representação ideal dos corpos em mecanica racional: ponto material e systema material.

Caracter vectorial das grandezas em mecanica. Noções de geometria de systemas de vectores como propedeutica da mecanica moderna.

A.—PHORONOMIA

a) MOVIMENTO ABSOLUTO

1) Phoronomia do ponto material

Objecto da Phoronomia; correlação entre esta sciencia e a geometria. Movimento absoluto e relativo. A fluxão das grandezas: noção geral de velocidade.

Theoria da velocidade

Equação do movimento do ponto sobre a trajectoria. Movimento uniforme e variado, rectilineo e curvilineo. Velocidade linear. Representação graphica da lei do movimento: curva dos espaços e das velocidades. Importancia da representação graphica do movimento como methodo de investigação das leis naturaes.

Decomposição do movimento: a simultaneidade de movimentos como pura concepção. Expressão do movimento de um ponto pelo de tres movimentos rectilineos coordenados: equações finitas do movimento. Composição de velocidades simultaneas de um ponto: parallelogrammo, parallelipipedo e, geralmente, polygono das velocidades. Movimento de um ponto em relação a um polo fixo: movimento areolar no plano e no espaço; movimento angular, movimento de circulação, e de resvalamento; velocidades respectivas. Propriedades projectivas do movimento de um ponto.

Applicações: projecção de um movimento circular e uniforme sobre um diametro — principaes propriedades da velocidade de um planeta no seu movimento ao redor do sol — methodo de Roberval para o traçado das tangentes ás curvas: exemplifica-se o methodo na espira de Archimedes, na conchoide, na quadratriz, nas conicas e na cycloide.

Theoria da acceleração

Incremento geometrico da velocidade; acceleração total; sua decomposição natural em acceleração tangencial e centripeta. Interpretação geometrica da acceleração total. Propriedades projectivas da acceleração total. Desvio elementar: importancia da sua consideração; expressão da acceleração no desvio. Equações differenciaes do movimento. Conhecimento que a consideração simultanea das noções de velocidade e acceleração dá do movimento de um ponto. Hodrographo. — Decomposição da acceleração total segundo o raio vector e a perpendicular a este raio n'um movimento plano. Exemplos: movimento elliptico areolar uniforme com o polo no centro da ellipse; movimento kepleriano.

2) Phoronomia dos solidos ou systemas invariaveis

Simplificações que ao estudo do movimento de um solido dá a hypothese da invariabilidade da fórma. Movimento elementar de um solido. As especies mais simples do movimento elementar de um solido: movimento de translação e de rotação; suas propriedades geometricas e phoronomicas. Representação da rotação por um vector.

Figuras planas

Movimento de uma figura plana no seu plano: deslocação finita: deslocação infinitamente pequena; centro ou polo instantaneo de rotação; determinação do polo pelo conhecimento das direcções das velocidades contemporaneas de dois pontos; situação do polo no infinito. Movimento con-

tinuo da figura plana; trajectorias polares; sua reciprocidade; sua determinação por pontos; movimento epicycloidal plano. Problema inverso das epicycloides.

Applicação ao movimento de uma recta de comprimento constante, cujos extremos são dirigidos pelos lados de um angulo: circulos de Cardan.

Exemplo de Reuleaux do *fuso plano no triangulo* (Gleichseitiges Bogenzweieck im Dreieck).

Movimento de uma figura plana no espaço: deslocação infinitamente pequena; fóco do plano; caracteristica; propriedades do fóco e da caracteristica. Caso em que a caracteristica passa ao infinito.

Figuras esphericas

Movimento de uma figura espherica na sua esphera; deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; polo e eixo instantaneo de rotação; sua determinação. Movimento continuo da figura espherica: trajectorias polares esphericas; reducção do movimento da figura ao de rolamento das trajectorias polares esphericas; movimento epicycloidal-espherico.

Solidos

Movimento de um solido cujos pontos se deslocam parallelamente a um plano fixo; sua reducção ao de uma figura plana no seu plano; rolamento cylindrico.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: sua reducção ao de uma figura espherica na sua esphera; theorema de Poinsot: rolamento conico. Relação que liga a velocidade angular ao redor do eixo instantaneo, a velocidade angular d'este eixo descrevendo as duas superficies conicas e os raios de curvatura d'ellas. Applicação á rotação diurna. Solução analytica: expressão em determinantes das componentes da velocidade linear de um ponto do solido (Euler).

Movimento o mais geral de um solido livre no espaço: deslocação finita; reducção a uma translação e rotação; infinidade de combinações de dois movimentos do mesmo genero; quantidades que permanecem constantes em todos os systemas d'essas combinações; systema notavel em que a translação é parallela ao eixo da rotação; seu estado unico: movimento helicoidal; eixo de rotação e de resvalamento, sua construcção — deslocação infinitesimal: eixo instantaneo de rotação e de resvalamento; determinação da velocidade do movimento helicoidal. Movimento continuo: imagem de Poinsot; imperfeição d'esta representação. Axoides: imagem de Poncelet. Superficies e contornos complementares dos axoides: theorema de Reuleaux que reduz o movimento mais geral de um solido ao rolamento de duas curvas.

b) MOVIMENTO RELATIVO

1) Movimento relativo de um ponto material

Relação entre a velocidade absoluta, relativa e de arrastamento. Casos de movimento relativo em que o movimento de arrastamento é uma translação simples, uma rotação simples: exemplifica-se no movimento apparente do sol e no movimento diurno dos astros. Relação entre a acceleração absoluta, relativa, de arrastamento e complementar: theorema de Coriolis, sua demonstração geometrica e analytica. Expressão em determinantes das componentes da acceleração complementar. Exemplos da applicação do theorema de Coriolis: acceleração de um ponto referido a coordenadas rectilineas, e polares.

2) Movimentos elementares compostos ou relativos de um solido

Composição de translações. Composição de rotações: 1.º ao redor de eixos parallelos: binario de rotações — 2.º ao redor de eixos convergentes. Composição de translações e rotações. Determinação analytica do *eixo central do movimento*.

Expressões analyticas da deslocação elementar de um ponto do solido em funcção dos seis parametros que definem o movimento mais geral do solido. Acceleração angular: componentes segundo o eixo instantaneo e a normal a este eixo. Projecções sobre tres eixos rectangulares fixos da acceleração angular total; que o theorema subsiste no caso dos eixos coordenados serem levados pelo movimento de rotação. Expressão em determinantes das componentes da acceleração de um ponto do solido devido á acceleração angular.

Acceleração no movimento dos solidos: *a*) acceleração no movimento de um solido parallelamente a um plano, ou acceleração no movimento de uma figura plana no seu plano: logar geometrico dos pontos materiaes em que a acceleração normal é nulla (circumferencia de inflexão); logar geometrico dos pontos materiaes em que a acceleração tangencial é nulla; centro das acceleracões; centro *geometrico* das acceleracões; *b*) acceleração no movimento de um solido ao redor de um ponto fixo; *c*) acceleração no movimento geral de um solido: theorema de Rivals; expressão analytica d'este theorema.

De algumas particularidades que o movimento relativo de duas superficies solidas em contacto podem apresentar.

Passagem da phoronomia á estatica e dynamica

Principios fundamentaes da mecanica racional, considerados como factos primarios da constituição cosmica: I Principio da persistencia — II Principio da coexistencia — III Principio da mutualidade de acção.

As forças comparadas aos seus effeitos: noção de massa. Avaliação numerica das massas pelos pesos; densidade; homogenidade. Representação das forças por vectores.

Como a noção de massa opera a passagem dos theoremas e construcções da phoronomia para a dynamica: composição das forças applicadas a um mesmo ponto material; projecção das forças; decomposição de uma força applicada a um ponto material em força tangencial e normal á trajectoria do ponto; theorema de Coriolis em dynamica; força de inercia de arrastamento, força centrifuga composta.

Noção do trabalho das forças: alta importancia da noção do trabalho, tirada da sciencia economica, em vista da industria do homem e da grande industria da Natureza. Unidades de trabalho. Trabalho elementar de uma força: dois aspectos differentes de o considerar. Expressão do trabalho elementar de uma força emanante de um ponto fixo.

Trabalho virtual; importancia d'esta concepção como artificio de raciocinio. Theorema que liga o trabalho elementar da força resultante ao das forças componentes; theorema que liga o trabalho elementar de uma força relativo a uma deslocação qualquer aos trabalhos da mesma força relativos ás deslocações componentes d'aquella. Expressão do trabalho elementar de uma força em coordenadas rectangulares. Noção de momento de uma força em relação a um ponto, a um eixo e a um plano. Representação do momento por uma area plana; representação do momento por um vectore: eixo do momento. Theorema do trabalho elementar de uma força na rotação do ponto de applicação da força ao redor do eixo. Determinantes que exprimem os momentos de uma força relativamente a tres eixos rectangulares. Modificações que soffrem estes determinantes devidas a uma translação dos eixos coordenados. Expressão do momento de uma força relativamente a um eixo dado de posição em funcção d'aquelles determinantes. Theorema de Varignon. Relação entre os momentos de uma força relativamente a um feixe de rectas que se crusam no mesmo ponto.

B. — ESTATICA

1) Estatica do ponto material

Definição de equilibrio. Independencia das condições estaticas das forças e do estado de quietação ou de movimento do ponto material. Equa-

ções geraes do equilibrio de um ponto livre. Reducção das tres equações do equilibrio a uma unica equação, por meio do trabalho virtual. Equilibrio de um ponto obrigado a uma curva ou superficie; reacção normal da curva e da superficie; reducção d'este equilibrio ao do ponto livre. Dois methodos para o estabelecimento das equações de equilibrio: 1.º methodo do trabalho virtual; 2.º methodo das reacções. Equilibrio relativo de um ponto livre: applicação a um ponto pesado á superficie da terra; peso do ponto material.

2) Estatica dos systemas materiaes

Noções sobre a constituição dos systemas naturaes; distincção de forças interiores e exteriores. Hypothese da continuidade da materia nos corpos. Pressão n'um elemento dos systemas materiaes; isotropismo. Systemas obrigados a ligações; systemas invariaveis. Lemma relativo á somma dos trabalhos das forças interiores.

Equilibrio dos systemas obrigados a ligações (*principio das velocidades virtuaes*); reducção do systema ao de pontos livres. Theorema de Tschirnhausen servindo de lemma para obter a expressão do trabalho das forças de ligação. Annullação d'este trabalho para deslocações virtuaes compativeis com as ligações. Methodo de Lagrange para o estabelecimento analytico das equações geraes do equilibrio; sua importancia.

Exemplos.

Equilibrio dos systemas invariaveis; applicação do *principios das velocidades virtuaes* aos systemas invariaveis — 1.º caso em que o systema é livre: as seis equações necessarias e sufficientes que definem o equilibrio. Reducção do numero das equações de equilibrio em casos especiaes das forças applicadas: *a*) forças convergentes em um mesmo ponto; *b*) forças parallelas a um plano, a uma recta; *c*) forças situadas n'um mesmo plano. — 2.º caso em que o systema está obrigado a um ponto fixo, ou a um eixo fixo; equações da reacção do ponto ou do eixo.

Equilibrio de um corpo que se appoia n'um plano fixo por um numero determinado de pontos; solução do paradoxo relativo ás pressões.

Equivalencia das forças; sua expressão analytica por seis ou por uma equação. Consequencias immediatas da equivalencia.

Composição das forças nos casos especiaes: systema de forças convergentes; systema de forças parallelas. Caso de duas forças parallelas — *binario* de forças.

Theoria dos binarios de forças: propriedades do binario; representação do binario por uma area, e por um vector (*eixo do binario*); propriedade projectiva do eixo; effeito dynamico de um binario applicado a um solido. Composição dos binarios.

Composição geral das forças: reducção de um systema qualquer de forças a duas; a uma resultante de translação e a um binario; momento resultante. Expressão analytica da condição de reductibilidade de um systema

de forças a uma unica força. Minimo dos momentos relativamente ás diversas posições da resultante de translação (*dynamo*): *eixo central dos momentos* — representação geometrica de Poinsot dos eixos no espaço relativamente aos quaes se tomam os momentos de um systema de forças. Theorema de Chasles relativo á invariabilidade de volume do tetraedro cujas arestas oppostas são os dois vectores que representam as forças equivalentes a um systema. Lei de dualidade entre a Estatica e a Phoronomia.

Centro das forças parallelas; propriedades caracteristicas. Centro de gravidade: centro de massa de solidos, superficies e linhas. Caso da homogenidade. Theoremas que podem facilitar a determinação do centro de gravidade. Exemplos principaes da determinação do centro de gravidade na hypothese da homogenidade.

Methodo centrobarico: theorema de Pappus-Guldin.

Equilibrio dos systemas funiculares: noção de tensão do cordão; equilibrio de um cordão actuado por tres forças: equilibrio do polygno funicular; construcção graphica de Varignon: casos particulares do polygno funicular; equações do equilibrio da curva funicular: applicação a um fio tenso sobre uma superficie — a um fio homogeneo pesado suspenso pelas extremidades (catenaria). Equilibrio dos systemas polygonaes articulados sem attricto.

Theoria geral da funcção de força: determinação simples das quantidades relativas á força por meio da funcção de força; representação geometrica por meio das superficies de nivel. Caso fundamental em que existe uma funcção de força; potencial. Theoremas de Laplace e de Poisson relativos ao parametro differencial da segunda ordem do potencial.

Applicação á attracção de uma esphera homogenea, ou composta de camadas esphericas homogeneas, sobre um ponto material situado no exterior ou interior da esphera.

Equações do equilibrio interior de um systema material qualquer; equilibrio do parallelipido e do tetraedro elementar. Ellipsoide das pressões. Orientação de um elemento plano sob uma determinada pressão.

Casos de systemas isotropos: Hydrostatica. Equações geraes do equilibrio dos fluidos: equação de Clairaut. Superficie de nivel; expressão da pressão no parametro da superficie de nivel; propriedades izopiezica, isotherma e homogenica de uma camada de nivel.

Applicação aos liquidos pesados; altura representativa das pressões. Pressão de um liquido pesado sobre uma superficie immersa: centro de pressão; sua determinação geometrica e analytica no caso da superficie plana. Reducção das pressões elementares sobre uma superficie curva. Caso em que as pressões superficiaes dão resultante: *principio* de Archimedes. Equilibrio dos corpos fluctuantes: condição de estabilidade do equilibrio.

Applicações: nivellamento barometrico: equilibrio relativo de um liquido que gira uniformemente ao redor de um eixo vertical.

Summaria exposição historica dos diversos principios sobre que se tem fundado a Estatica.

C. — DYNAMICA

1) Dynamica de um ponto material

Equações differenciaes dynamicas do movimento linear: forma de Euler; forma de Maclaurin: problemas geraes que ellas exprimem; determinação das constantes arbitrarias. Expressão d'estas equações sob a forma de equilibrio: força de inercia, equação do trabalho virtual que exprime o equilibrio dynamico.

Equações differenciaes dynamicas do movimento areolar.

Integraes geraes das equações differenciaes do movimento: Theorema do augmento da quantidade de movimento projectado — Theorema do trabalho; caso de funcção de força: theorema das forças vivas; expressão do theorema por meio das superficies de nivel. Dois casos importantes em que existe funcção de força — Theorema do accrescimo do momento da quantidade de movimento em relação a um eixo. Caso do theorema das areas. Forças centraes: expressão differencial de uma força central nos elementos da trajectoria.

Movimento de um ponto sobre uma curva e sobre uma superficie dadas: caso de funcção de força. Dynamica do movimento relativo de um ponto material: extensão dos theoremas geraes a este movimento.

Applicações:

Movimento rectilineo em geral: casos em que a integração se reduz a quadratura — Movimento rectilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central proporcional á distancia ao centro — Movimento rectilineo e vertical, descendente e ascendente, de um ponto pesado no vacuo e n'um meio resistente.

Exemplos principaes de movimento curvilineo:

Movimento dos projectis no vacuo e em um meio resistente — Movimento curvilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central: *a*) proporcional á distancia ao centro; *b*) inversamente proporcional ao quadrado da distancia ao centro: movimento dos planetas ao redor do Sol; leis de Kepler e suas immediatas consequencias.

Exemplos principaes do movimento de um ponto sobre uma curva e uma superficie: Movimento de um ponto pesado sobre uma recta inclinada. Movimento de um ponto material pesado movel sobre um circulo vertical; pendulo circular simples no vacuo; pendulo cycloidal no vacuo. Tautochrona e brachistochrona de um ponto pesado no vacuo. Pendulo circular em um meio resistente no caso de mui pequenas oscillações. *Soluções singulares* em mecanica; interpretação de Boussinesq; um dos exemplos mais simples.

Exemplos de movimentos relativos: queda de um ponto pesado no vacuo attendendo ao movimento da terra: desvio éste confirmado pela experiencia de Reich em Freyberg. Pendulo de Foucault.

2) Dynamica dos systemas materiaes

Systemas obrigados a ligações:

Reducção da dynamica dos systemas á estatica dos systemas: *principio* de d'Alembert: seus differentes enunciados, e expressão analytica. Equações geraes do movimento estabelecidas pela applicação do methodo dos multiplicadores; vantagem da introducção das indeterminadas. Exemplos do emprego do methodo. Distincção essencial das ligações não variarem ou variarem com o tempo para a dependencia que existe entre o movimento real e os movimentos virtuaes. Theorema de Hamilton; equações dynamicas de Lagrange (primeira forma canonica); equações dynamicas de Hamilton (segunda forma canonica). Applicação das equações de Lagrange ao movimento de um ponto obrigado a uma esphera (pendulo conico).

Integraes da equação geral do movimento: Theorema do movimento do centro de gravidade — Theorema das quantidades de movimento projectadas — Theorema dos momentos das quantidades de movimento; interpretação phoronomica de Resal: theorema das areas; plano do maximo das areas; caso do plano invariavel — Theorema das forças vivas; theorema da energia: conservação da energia total do Universo; theorema de Yvon Villarceau relativo ao virial.

Theorema de Gauss do minimo esforço. Theorema da menor acção.

Estabelidade do equilibrio: theorema de Lejeune-Dirichlet.

Extensão dos theoremas geraes ao caso do movimento relativo.

Propriedades mecanicas do centro de gravidade; theorema de Kœnig; trabalho da gravidade.

Systemas invariaveis: Decomposição do movimento de um solido livre em movimento do centro de gravidade e ao redor d'este centro; expressão da somma dos momentos das quantidades de movimento e da força viva de um solido movendo-se ao redor de um eixo.

Theoria dos momentos de inercia: momentos de inercia em relação a um eixo, a um ponto (*polar*), e a um plano; relação de dependencia das tres especies de momentos de inercia; raio de gyração; relação entre os momentos de inercia relativos a eixos parallelos; propriedade de minimo momento. Momento de inercia em relação a um eixo passante por um ponto; eixos principaes de inercia (Segner) e momentos de desvio (*deviations moments, Rankine*); propriedades dos eixos principaes e sua determinação; ellipsoide central (Cauchy-Poinsot). Theoremas geraes que podem felicitar a determinação dos eixos principaes de inercia. Expressão do momento de inercia de um solido de revolução em relação ao seu eixo. Momentos de inercia das figuras planas: ellipse central. Momento de inercia polar. Exemplos principaes da determinação de momentos de inercia.

Equações dynamicas do movimento de um solido ao redor de um eixo fixo; theoria do pendulo composto — pendulo simples synchrono; eixo de oscillação; propriedades de maximo e de minimo do tempo de uma oscillação.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo; equações de Eu-

ler; formulas que exprimem as componentes de rotação instantanea nas velocidades de nutação, precessão e rotação propria do solido. Caso em que as forças são nullas, ou reductiveis a uma força que passa constantemente pelo ponto fixo: dois primeiros integraes das equações de Euler; estabelecimento directo d'estes integraes. Theoria geometrica de Poinsot.

Movimento de um solido de revolução homogeneo obrigado a um ponto fixo do seu eixo de figura — caso particular de uma precessão uniforme sem nutação, com rotação propria uniforme. — Applicação a um solido de revolução pesado homogeneo.

Movimento de um solido inteiramente livre, actuado por um systema qualquer de forças.

Theoria da percussão; theoremas de Darboux relativos á variação da orça viva na percussão. Applicação a um solido obrigado a um eixo fixo; centro de percussão. Choque dos corpos; solução geometrica de Darboux.

II—CINEMATICA

(THEORIA DOS MECANISMOS)

Objecto da cinematica theorica, considerada como sciencia da composição e do movimento das machinas, ou theoria dos mecanismos. Breve digressão historica sobre a origem e formação d'esta sciencia — exposição critica dos systemas de classificação dos mecanismos de Monge, Hachette, Lanz e Bétancourt (1809-1819), Borgnis (1818). Limitação e denominação da sciencia por Ampère (1834); systema de Robert Willis (1841), de Laboulaye (1849), de Haton de la Goupillière (1861).

Razão da imperfeição dos systemas propostos. Constituição logica e scientifica da cinematica pelo systema Reuleaux, fundado nas verdadeiras leis da formação dos mecanismos. Solução geral dos problemas das machinas: ponto de partida de Reuleaux; definição de machina. Caracteristica dos problemas relativos ás machinas. Analyse cinematica das machinas: decomposição em mecanismos, em cadeias, em binarios de elementos. Formação de um binario de elementos pela ligação reciproca dos elementos de dois binarios primitivos. Ligação de um numero qualquer de binarios de elementos: cadeia cinematica simples e composta; cadeia fechada desmodromica. Transformação da cadeia fechada em mecanismo. Pluralidade d'esta transformação. Transformação do mecanismo em machina.

Differentes especies de binarios de elementos: condição a que deve satisfazer um binario de elementos para ser desmodromico. Binarios de elementos inferiores ou de encaixamento (parafuso, cylindro, prisma); seu estabelecimento *à priori*. Apoios necessarios e sufficientes dos elementos. Binarios superiores. Investigação geral dos perfis de elementos em vista de uma dada lei de movimento: processo geral de dentadura; theorema e construcção de Savary; processo approximado de Poncelet; processo de trajectorias polares auxiliares.

Caso em que a lei do movimento é defenida por trajectorias polares circulares: engrenagens cylindricas nos tres typos principaes de lanterna, flancos, desenvolventes de circulo; processos de dentadura de Reuleaux. Engrenagem de cremalheira. Resvalamento durante o movimento relativo elementar de dois dentes em contacto. Engrenagens conicas; methodo practico de Tredgold. Engrenagens hyperboloides.

Binarios de elementos dependentes: clausura dos binarios por meio de forças sensiveis; clausura por meio de cadeias cinematicas. Elementos cinematicos ductis; binarios monocineticos (orgãos de tracção e de compressão); clausura cinematica completa dos elementos ductis.

Cadeiras cinematicas dependentes: pontos mortos nos mecanismos; passagem d'estes pontos por meio de forças sensiveis ou por clausura de cadeias.

Notação cinematica.

Cadeia fundamental: *quadrilatero de manivella cylindrico;* trajectorias polares da cadeia; trajectorias polares reduzidas. Mecanismos derivados da cadeia. Transformação evolutiva da cadeia: *cadeia cylindrica de manivella de impulsão;* theoria geometrica e analytica da biella. Mecanismos d'ella derivados; machinas que elles constituem.

Principios geraes de modificação accessoria de fórma: 1.º amplificação dos moendes (Zapfen-Erweiterung). — 2.º reducção das cadeias.

Applicação d'estes principios á cadeia de manivella ($C''_3P\perp$): amplificação 2 em 1, 1 em 2 (excentrico), 3 em 2, 2 em 3, 1 em 2 em 3, 3 em 2 em 1.

Transformação evolutiva da amplificação annular 2 em 3: *cadeia de corrediça em cruz rectangular;* mecanismos derivados.

Reducção do numero de membros de uma cadeia: exemplifica-se nas cadeias ($C''_3P\perp$) — c; ($C''_3P\perp$) — a — c; ($C_2\perp C_2\perp$) — c.

Corrediça oscillante em cruz obliqua ($C''_2\ P_2\perp$)d. Cadeias de corrediça angular de desvio simples e duplo: ($CP\perp\ CP\perp$); **2** ($CP\perp$).

Cadeia simples de rodas dentadas cylindricas; mecanismos derivados: mecanismo epicyclo.

Capsulismos de manivella derivados da cadeia ($C''_3P\perp$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schemas das machinas de vapor de Simpson e Shipton, de Cochrane, de Davies; schemas das bombas de Beale e de Ramelli, do ventilador de Wedding).

Capsulismos de rodas derivados da cadeia simples de rodas dentadas cylindricas ($C^z+C''_2$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schema das machinas de Pappenheim, Fabry, Root, Evrard, Repsold, Dart, Révillion Galloway. Trens ordinarios de rodas dentadas; engrenagens recorrentes; trens epicycloidaes.

Analyse cinematica das machinas tradicionalmente consideradas como *machinas simples:* alavanca, plano inclinado, cunha, roldana, sarilho, parafuso.

Analyse das machinas completas: concepção que considera a machina completa como o resultado da combinação das tres partes — receptor — transmissor — operador. Divisão das machinas em machinas de transporte e de transformação. Critica d'aquella concepção. Interpretação cinematica da machina completa.

Theoria geral do movimento das machinas.

METHODO DE ENSINO

O curso da 3.ª cadeira é dado em 70 lições (numero médio) de duas horas cada uma (seis semanaes) expostas na aula pelo professor. Depois de um certo numero de lições, que completem uma divisão do programma, os alumnos são interrogados pelo professor sobre as materias dadas (o numero dos interrogatorios não excede doze).

O professor expõe as lições segundo o programma, sem dependencia de compendio; para o que, previamente á hora da lição, os calculos e as figuras são escriptos e traçadas com todo o desenvolvimento nas tres pedras da aula, sendo as duas horas da lição consagradas á exposição oral feita pelo professor. Indica-se, porém, como podendo servir de auxilio ao trabalho dos alumnos no estudo das lições expostas sobre o programma, a obra de G. Gilbert — Cours de Mécanique, 2.ª edição, 1882: e faz-se opportunamente a bibliographia das principaes obras a consultar para maior desenvolvimento de alguns assumptos mais importantes do curso.

IV Cadeira — Geometria descriptiva

Lente *Duarte Leite Pereira da Silva*. Oito horas semanaes.

PRIMEIRA PARTE

Objecto e historia da geometria descriptiva; methodos de projecção central e parallela. Formas fundamentaes das 3 especies, sua relação e correspondencia.

Projecção central; correspondencia e collineação perspectiva. Representação do centro e dos elementos que o contém. Raios e planos projectivos, triangulo caracteristico.

Representação d'elementos que não contém o centro. Rectas e planos; traços, pontos e linhas de fuga, triangulo caracteristico. Rebatimento do plano projector, ponto de divisão. Problemas sobre rectas e planos.

Passagem para a geometria projectiva. Lei de dualidade na geometria do espaço, do plano e da payeia; fórmas correlativas; exemplos.

Correspondencia de formas. Formas perspectivas, elementos correspondentes e unidos. Formas projectivas; theorema fundamental.

Projectividade de duas formas de tres elementos.

Formas sobrepostas concordes e oppostas.

Relações metricas entre formas projectivas. Razão anharmonica, symbolo de Möbius. Theorema de Pappus para as formas perspectivas, passagem para as projectivas; as seis razões anharmonicas de quatro pontos.

Formas harmonicas, elementos conjugados. Theoremas e construcções geometricas resultantes.

Construcção de formas projectivas, e razões anharmonicas e harmoni-

cas. Pontos limites em pontuaes projectivas; rectos centraes em feixes projectivos.

Theoremas de Pappus, Desargues e Chasles.

Formas semelhantes e eguaes, theoremas.

Formas involutorias; involução, elementos conjugados. Ponto e recta central, elementos duplos. Theoremas fundamentaes, elementos imaginarios (v. Staudt).

Theorema de Desargues, construcção de formas involutorias. Theoremas de la Ceva e Menelaus.

Collineação de formas de 2.ª especie. Formas collineares e reciprocas (v. Standt); lei da dualidade.

Projectividade de formas collineares e reciprocas. Centro e eixo de collineação, elementos correspondentes e unidos, rectas limites.

Theorema sobre a rotação do centro de collineação em torno d'uma recta, limite, homologia, centro e eixo; rectas limites, construcção de formas homologicas. Conicas, como homologas do circulo; suas especies. Caracteristica da homologia; affinidade, semelhança, e congruencia.

Dupla geração pontual e tangencical d'um circulo. Passagem para as conicas; pontual e feixe de segunda ordem, theoremas fundamentaes.

Elementos que determinam uma conica. Theoremas de Pascal e Brianchon; seus corollarios; applicações e problemas.

Series projectivas de pontos e tangentes, elementos unidos; generalisação das formas de 1.ª especie.

Series involutorias de pontos e tangentes, elementos duplos.

Polos e polares, separação harmonica; triangulo polar. Theorema fundamental; demonstração da lei da dualidade no plano.

Curvas polares reciprocas.

Elementos conjugados e sobrepostos em involução.

Centros e diametros conjugados, propriedades e theoremas, eixos. Fócos e directrizes.

Theorema de Desargues e corollarios. Problemas do segundo gráu. Collineação nas formas a tres dimensões, elementos correspondentes e unidos; centros, eixos e plano de collineação, planos limites. Caracteristica; affinidade, semelhança, e congruencia. Projecção orthogonal usual. Repetição dos elementos do methodo das projecções orthogonaes, e seu desenvolvimento; problemas.

2. Curvas planas, geometricas e graphicas. Tangente e normal, pontos singulares; traçado das tangentes e normaes a curvas graphicas, curvas d'erro. Curvatura, construcção do seu centro.

Projecções d'uma curva plana, e da tangente; partes uteis e parasitas.

Superficies; plano tangente, e normal. Curvatura; secções principaes, theorema d'Euler. Normalias, linhas de curvatura e geodesicas. Representação graphica d'uma superficie, contornos apparentes.

3. Cones e cylindros, em especial de 2.ª ordem, sua representação graphica. Construcção do plano tangente. Problemas em que entram como auxiliares cones e cylindros.

Secções planas d'um cone ou cylindro; caso em que são parallelas. Fórma das curvas; ramos infinitos e assymptotas. Processos para construir as projecções d'uma secção, e das suas tangentes.

Construcção da secção no seu plano. Transformada por planificação methodo geral para o seu traçado.

4. Superficies de revolução, modos de geração. Planos tangentes, e normaes. Representação graphica das superficies de revolução e construcção do plano tangente.

Secções planas; methodos geraes para determinar as suas projecções, e a tangente n'um ponto qualquer.

Toro; forma das secções planas, theorema de Yvon Villarceau. Hyperboloide de revolução; principaes propriedades.

5. Superficies regradas, modos de geração. Superficies planificaveis, e enviezadas; planos tangentes, aresta de reversão. Concordancia de duas superficies regradas ao longo d'uma geratriz.

Hyperboloide regrado; principaes propriedades. Divisão homográphica e propriedades anharmonicas das geratrizes. Representação graphica: construcção de planos tangentes e secções planas.

Transição para o paraboloide; estudo especial d'esta superficie. Sua representação graphica; construcção de planos tangentes e de secções planas.

Construcção do plano tangente a uma superficie regrada qualquer, por meio de hyperboloides e paraboloides auxiliares.

Estudo summario dos conoides, cylindroides, e superficies d'egual declive.

6. Quadricas; modos de geração, propriedades e theoremas geraes. Theoria dos pólos e polares; demonstração da lei de reciprocidade. Representação graphica das differentes especies de quadricas; construcção de planos tangentes. Secções planas; sua construcção.

7. Intersecção de superficies; curvas empenadas. Tangente, e plano normal, pontos singulares; plano e circulo osculador. Propriedades projectivas das curvas empenadas.

Methodos geraes de construcção da intersecção de duas superficies, e da tangente n'um ponto qualquer.

8. Intersecção de cones e cylindros, processos de construcção da curva e da tangente. Penetrações, arrancamentos, e casos mixtos. Fórma da curva; ramos infinitos e assymptotas, pontos singulares.

9. Intersecção de superficies de revolução e cones ou cylindros; processo de construcção da curva por meio de projecções conicas ou cylindricas, e traçado da tangente.

Intersecção de superficies de revolução. Processo de construcção no caso em que os seus eixos se encontram, e traçado da tangente, grau da projecção da intersecção no plano dos eixos. Caso geral em que os eixos se não encontram; varios processos de construcção, emprego de superficies auxiliares de revolução (Schiappa Monteiro), traçado da tangente.

10. Intersecção de quadricas. Discussão da curva; quarticas de segunda especie e cubicas; principaes propriedades. Theoremas geraes sobre as intersecções planas de quadricas.

Processos geraes de construcção da intersecção de quadricas, baseados na projecção conica (Schiappa Monteiro); traçado da tangente, e determinação dos pontos singulares.

Processos especiaes para o caso de duas quadricas de revolução (Chapuy), e duas quadricas regradas, com geratriz commum.

11. Projecções cotadas. Problemas relativos á recta e ao plano.

Cones e cylindros, construcção de planos tangentes.

12. Calculo graphico. Operações simples, potencias e raizes; logarithmos. Instrumentos de calculo. Operações graphicas sobre areas; transformação graphica de areas; planimetro polar.

13. Graphostatica. Representação graphica das forças. Composição de forças que actuam n'um ponto; parallelogrammo e polygono de forças. Composição de forças n'um plano; binarios, polygono funicular. Momentos de rotação das forças. Forças no espaço. Caso de forças parallelas; centro de gravidade. Momentos de inercia. Applicações.

SEGUNDA PARTE (4.º ANNO)

1. Superficies helicoidaes. Parafuzos de filetes triangulares e quadrados.

Traçado das engrenagens cylindricas, conicas e helicoidaes.

2. Superficies topographicas.

3. Theoria das sombras. Definição: linha de separação de sombra e luz. Sombra propria e produzida. Methodos geraes para a resolução dos problemas de sombras; pontos brilhantes. Noções sobre aguadas.

4. Perspectiva linear conica. Definições; perspectiva de figuras no geometral, escala de larguras. Perspectiva d'uma elevação, escala de alturas; rebaixamento do geometral. Construcções directas sobre o quadro. Problema inverso da perspectiva.

5. Perspectiva cavalheira, axonometrica e isometrica.

6. Noções de stereotomia.

V Cadeira — Astronomia e geodesia

Lente (interino) *L. J. Woodhouse*. Oito horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 66 a 68).

VI Cadeira — Physica

Lente *Conde de Campo Bello*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 68 a 83).

VII Cadeira — Chimica inorganica

Lente *Dr. José Diogo Arroyo*. Oito lições semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 83 a 89).

VIII Cadeira — Chimica organica

Lente *A. J. Ferreira da Silva.* Oito lições semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 17 a 23).

IX Cadeira — Mineralogia, paleontologia e geologia

Lente (interino) *M. A. Gonçalves.* Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 95 a 100).

X Cadeira — Botanica

Lente *Dr. F. Salles Gomes Cardoso.* Seis horas semanaes

Introducção. — Plano d'exposição do curso. Objectos d'estudo e meios d'observação.

Jardins botanicos.

Herbarios. Processos para a colheita e conservação das plantas.

Technica microscopica. Condições especiaes das preparações botanicas. Methodos para obter as amplificações maximas. Processos de desenho. Noções theoricas necessarias para a interpretação das imagens microscopicas.

Historia da sciencia botanica. Estudos feitos sobre a Botanica portugueza.

MORPHOLOGIA — PHYSIOLOGIA — EMBRYOGENIA

NOÇÕES GERAES DE MORPHOLOGIA E PHYSIOLOGIA

Morphologia da cellula. — Natureza chimica e estructura physica do protoplasma. E' uma substancia proteica. Suas relações com os corpos colloides. Meio interno da cellula. Productos a que o protoplasma dá origem. Cytoplasma e Hyaloplasma. Microsomas-cytoplasmaticos. O protoplasma tem uma estructura reticulada. Camada membranosa. Morphologia do nucleo. Hyaloplasma nuclear. Microsomas nucleares. Nucleolos. Nucleina, chromatina e achromatina. Membrana cellular. Fermentos soluveis. Chlorophylla. Productos de transubstanciação. Cristalloides. Aleurona. Amido.

Physiologia da cellula. — Elementos nutritivos da cellula vegetal. Nutrição e respiração. Theorias da respiração. Condições physicas de todos os phenomenos vitaes. Nutrição. Assimilação e transubstanciação. Estados de combinação em que os elementos nutritivos são mais aptos para entrar na corrente organica. Funcção chlorophyllina. Synthese dos compostos ternarios. Trabalho chimico da nutrição no protoplasma incolor. Digestão vege-

*

tal. Papel dos fermentos soluveis nos phenomenos chimicos da cellula. Synthese dos albuminoides.

Formação das cellulas. — Divisão cellular. Divisão binaria. Cellulas sem nucleo. Cellulas com nucleo. Phenomenos da Karyokinese. Trabalhos recentes de Strasburger, Flemming e Guignard. Significação dos asters. O processo typico de divisão binaria parece estabelecer um parentesco intimo entre os phytoplasmas e os zooplasmas. Reproducção por gomos. Divisão pluricellular. Formação livre; casos intermediarios que a ligam á divisão normal. Renovação; é reductivel ao processo da bipartição. Conjugação e fecundação. Sexualidade. Gametas. Homologias entre os gametas masculinos e femininos. Theoria geral da conjugação e fecundação.

Motilidade. — A contractilidade parece ser o resultado d'acções physico chimicas. Theoria e classificação dos movimentos que se observam na cellula vegetal.

Evolutilidade e Sensibilidade. — Definição das propriedades fundamentaes da materia viva. Os phytoplasmas e os zooplasmas considerados comparativamente nas suas tendencias evolutivas. A sensibilidade nos phytos e zoorganismos. O bioplasma.

Morphologia dos tecidos e apparelhos. — Caracteres geraes dos tecidos. Origem dos tecidos. Meristema. Genese do meristema. Classificação e estudo dos tecidos e apparelhos. Epiderme. Suber. Parenchyma. Tecido secretor. Sclerenchyma. Tecido crivoso. Tecido vascular. Espaços intercellulares aeriferos. Apparelhos: tegumentar, conductor, de sustentação, conjunctivo, assimilador, de reserva, secretor, absorvente, e aerifero.

Physiologia dos tecidos e apparelhos.

Morphologia geral do corpo da planta. — Differenciação progressiva e divisão correspondente do trabalho vital. Crescimento. Desegualdade de crescimento; nutação. Ramificação. Disposição dos membros. Diagrammas. Entre-nós e divergencias. Causas morphologicas que determinam a disposição dos membros. Accidentes da superficie; pellos; emergencias; cryptas e stomas. Alteração na disposição primitiva dos membros.

Physiologia geral do corpo da planta. — Condições de exercicio de vida. Analyse do meio externo. Natureza dos alimentos. Influencia das radiações. Thermotropismo. Heliotropismo. Combinação do geotropismo e do heliotropismo. Influencia da refrangibilidade das radiações sobre os movimentos phototacticos. Acção da planta sobre o meio externo. Emissão de radiações. Acção dos solidos, liquidos e substancias dissolvidas.

Differenciação progressiva do corpo da planta. — Divisão progressiva do trabalho. Raiz. Caule. Folha. Flor.

Morphologia e Physiologia da raiz.

Morphologia e Physiologia do caule.

Morphologia e Physiologia da folha. Phyllotaxia. Folheatura dos gomos.

Morphologia e Physiologia da flor. — Estructura do pedicello, das bracteas, do calix e da corolla. Estructura do androceo; formação das cellulas mães do pollen; estructura e dehiscencia da parede da anthera; desenvolvimento e estructura do tubo pollinico. Estructura do gyneceo; gyneceo dyalycarpellar. Estructura do estylete e estigma. Estructura do ovulo. Formação do sacco embryonario. Homologia da nucella e sacco pollinico. Angiospermicas, gymnospermicas. Formação da oosphera no sacco embryo-

nario das Angiospermicas. Formação da oosphera no sacco embryonario das Gymnospermicas. Estructura do funiculo e dos tegumentos. Estructura dos nectarios floraes. Liquido estygmatico. Transpiração da flor. Desenvolvimento d'acido carbonico nos orgãos floraes. Papel physiologico dos verticillios floraes successivos. Pollinisação. Papel dos insectos na pollinisação. Flores dichogamicas e isogamicas. Germinação do pollen. Fecundação nas Angiospermicas e Gymnospermicas. Caracteres geraes da formação do ovo.

Inflorescencias. Preflorescencia. Diagrammas floraes.

Embryogenia das Phanerogamicas. — Desenvolvimento do ovo em embryão nas Angiospermicas e Gymnospermicas. Suspensor. Formação do albumen. Endosperma. Desenvolvimento do ovulo em semente. Perisperma. Amendoa. Formação do fructo. Germinação da semente e desenvolvimento do embryão em plantula. Digestão das provisões nutritivas. Desenvolvimento da plantula em planta adulta. Discontinuidade do desenvolvimento. Periodos de repouso. Vida latente dos tuberculos e gomos. Applicação dos processos naturaes de desenvolvimento dissociado á multiplicação artificial das plantas. Esboço geral da vida das plantas.

Embryogenia das Cryptogamicas vasculares. — Formação do ovo nos Fetos. Soros. Sporangeos. Sporos. Germinação dos sporos e desenvolvimento do *prothallium*. Antheridios e archegonios. Desenvolvimento do ovulo em embryão e d'este em planta adulta.

Embryogenia das Muscineas.

Formação da cellula-ovo e desenvolvimento das Thallophytas.

Sexualidade e autofecundação. Differença sexual dos gametas. Parthenogenese. Apogamia. Hybridos e Mestiços. Formação de variedades pelo crusamento.

TERMINOLOGIA — TAXONOMIA

Definição dos termos technicos. Traducção latina d'esses termos. Noções geraes sobre classificação. Methodo artificial de Tournefort. Clave do systema de Linneo. Methodo natural de Jussieu. Agrupamento de De Candolle. Classificações de Endlicher e de Brogniarr.

BOTANICA ESPECIAL

Thallophytas. — Caracteres geraes e divisão.

Cogumellos. — Caracteres physicos e chimicos dos Cogumellos. Estructura dos Cogumellos: sporos; hymenium; mycelium. Reproducção e fecundação nos Cogumellos. Polymorphismo. Propriedades nocivas dos Cogumellos. Schizomycetos e Saccharomycetos. Fermentações pathologicas. Theorias da auto-infecção. As Ptomainas. Classificação dos organismos fermentos. Papel alimentar dos Cogumellos. Caracteres geraes que permittem distinguir as especies nocivas das especies inoffensivas.

Algas. — Classificação e descripção.

Lichens.

Hepaticas. Sphagneas. Musgos.

Cryptogamicas vasculares. — Fetos. Ophiogliosseas. Lycopocaios. Sebaginellas. Isoetaceas. Marsiliaceas. Salvineas.

Gymnospermicas. — Cycadaceas. Conniferas e Gnetaceas.

Angiospermicas. — Caracteres geraes.
Monocotyledoneas.
Dycotyledoneas.

PALEONTOLOGIA

CLASSIFICAÇÃO DOS TERRENOS GEOLOGICOS

Floras que se tem succedido durante os differentes periodos geologicos.
Algas fosseis.
Cryptogamicas vasculares fosseis.
Evolução particular das Sigillarias. Calamodendreas, Dolerophylleas, Salisbureas, Aciculareas.
Evolução particular das Gnetaceas.
Origem e evolução das Monocotyledoneas e Dycotyledoneas.

GEOGRAPHIA BOTANICA

Noções sobre os climas.
Caracteres botanicos das zonas.
Influencia da distribuição dos climas, dos continentes, e dos mares nos periodos prehistoricos sobre a geographia vegetal.

BOTANICA AGRICOLA E INDUSTRIAL

Productos agricolas. Culturas industriaes. Plantas lenhosas. Arvores florestaes e fructiferas da Europa. Arvores folhosas. Arvores resinosas. Conservação de madeiras. Gommas. Materias gordurosas. Productos resinosos. Gommas elasticas. Materias filamentosas. Materias tinctoriaes. Substancias feculentas e saccharinas.

Aptidões agricolas do solo portuguez. Meios de melhorar essas aptidões. Productos agricolas do paiz. Descripção botanica de Portugal. Areas florestaes.

XI Cadeira — Zoologia

Lente *M. A. Gonçalves*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 108 a 109).

XII Cadeira — Construcções em geral e resistencia dos materiaes

Lente (interino) *M. Terra Pereira Vianna.* Seis horas semanaes

---

PRIMEIRA PARTE

PROCESSOS GERAES DE CONSTRUCÇÃO

I—Construcções e movimentos de terras.
1—Escavações. Transportes. Aterros. Consolidação de taludes.

2—Dragagens.

II—Construcções de pedra.

1—Pedras naturaes. Tijolos e outros productos artificiaes.

2—Argamassas. Cal, cimentos, pozzolanas. Areia.

3—Execução das cantarias e alvenarias.

III—Construcções de madeira.

1—Madeiras.

2—Samblagens e ligações.

IV—Construcções de ferro.

1—Ferro fundido. Ferro forjado. Aço.

2—Ligações e emprego do ferro nas construcções.

V—Materiaes e obras accessorias.

1—Gesso.

2—Betumes e asphalto.

3—Tintas e vernizes.

4—Alguns metaes e ligas.

VI—Fundações.

1—Sondagens.

2—Fundações ordinarias.

3—Fundações especiaes.

VII—Projectos. Organisação dos estaleiros. Direcção dos trabalhos. Marcação das obras.

SEGUNDA PARTE

RESISTENCIA DOS MATERIAES

(Os methodos da graphostatica são expostos juntamente com as theorias analyticas)

I—Noções preliminares.

1—Determinação dos centros de gravidade e momentos de inercia das areas planas.

2—Distribuição dos esforços sobre uma area plana.

II—Estabilidade das construcções de alvenaria.

1—Condições geraes de estabilidade. Massiço isolado. Massiço submettido a acções lateraes.

2—Exemplos. Acção do vento; chaminés. Muros de reservatorios.

3—Impulsos das terras. Muros de supporte.

4—Abobadas.

III—Determinação dos esforços nos systemas articulados. Vigas americanas. Vigas de rotula.

IV—Distensão e compressão simples.

1—Estudo geral.

2—Vasos e supportes cylindricos e esphericos.

V—Escorregamento transversal. Arrebites.

VI—Torsão.

VII—Flexão das vigas rectas.

1—Estudo geral.

2—Calculo dos momentos de flexão e dos esforços transversos. Vigas apoiadas em 2 pontos. Vigas encastradas. Vigas apoiadas em muitos pontos.

3—Determinação graphica dos momentos de flexão e dos esforços transversos.
4—Calculo das dimensões transversaes das vigas flectidas.
5—Vigas carregadas de topo.
6—Vigas submettidas a forças obliquas.
7—Semelhança das vigas na resistencia á flexão.
VIII—Flexão d'um systema de vigas rectas.
IX—Flexão dos arcos.
X—Flexão das superficies. Portas de eclusas.
XI—Flexão das molas.
XII—Effeito dos choques e das cargas em movimento.

Na segunda parte serve de texto o livro: A. Flamant—*Stabilité des constructions. Résistance des matériaux*—1886.

XIII Cadeira—**Hydraulica e machinas**

Lente *Roberto Rodrigues Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 25 a 28).

XIV Cadeira—**Construcções e vias de communicação**

Lente (interino) *R. Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 28 a 31).

XV Cadeira—**Montanistica e docimasia**

Seis horas semanaes

(Curso biennal)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 116 a 122).

XVI Cadeira—**Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação**

Lente *A. Lobo*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 32 a 39).

XVII Cadeira — Escripturação em geral e especialmente dos bancos. Contabilidade industrial

Lente *J. J. Rodrigues de Freitas*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, pag. 39 a 41).

XVIII Cadeira

Lente *Francisco da Silva Cardoso*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1886-1887, paginas 41).

SECÇÃO SCIENTIFICA

FRAGMENTOS DE UM CURSO D'ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

IV

(CALCULO DIFFERENCIAL)

Continuado do Annuario de 1886-1887

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

I

Definições e principios geraes

128. — Tendo de tractar agora das funcções de variaveis imaginarias, recordemos primeiro que toda a variavel imaginaria $z = x + iy$ póde ser representada por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y; e portanto que podemos fallar no ponto z, quando nos quizermos referir ao ponto (x, y), e reciprocamente que podemos fallar no imaginario representado pelo ponto (x, y) quando quizermos fallar no imaginario z.

129. — A toda a funcção da variavel imaginaria $z = x + iy$ que tem uma derivada finita e determinada em todos os pontos $x + iy$ do plano chama-se uma *funcção monogenea* da variavel imaginaria $z = x + iy$. Assim, por exemplo, são funcções monogeneas as funcções raccionaes inteiras, as funcções transcendentes e^z, sen z, cos z, etc.

Se entre dous pontos quaesquer de uma região A do plano onde estão representados os valores de z, se poder traçar uma linha continua em todos os pontos da qual a funcção $f(z)$ tenha uma derivada finita e determinada, diz-se que $f(z)$ é uma *funcção monogenea de z na área* A.

A respeito das definições precedentes faremos as observações seguintes:

1.ª — Para que uma expressão $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ seja

funcção monogenea de uma variavel imaginaria $z = x + iy$ é necessario que $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ satisfaçam ás condições seguintes (n.º 50):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Assim, por exemplo, a expressão

$$x^2 + y^2 + i(x - y)$$

não é funcção monogenea de $x + iy$.

2.ª — Uma funcção de uma variavel imaginaria z póde ser monogenea só em parte da área em que é determinada. Tem, por exemplo, esta propriedade a funcção definida pela série (*)

$$f(z) = \sum_0^\infty b^n z^{a^n}$$

quando a, que representa um numero inteiro positivo impar, e b que representa uma quantidade positiva menor do que a unidade, satisfazem á condição $ab < 1 + \frac{3}{2}\pi$. Com effeito, a série considerada é convergente quando é $|z| < 1$ (**) e quando é $|z| = 1$. Em todos os pontos que satisfazem á primeira condição, a funcção tem uma derivada finita e determinada, como adiante veremos. Nos pontos que satisfazem á segunda condição, a funcção não tem derivada, visto que, pondo $z = cos\ \omega + i\ sen\ \omega$, vem

$$f(z) = \sum_0^\infty b^n [\cos(a^n \omega) + i \operatorname{sen}(a^n \omega)],$$

e a funcção de ω

$$\sum_0^\infty b^n \cos(a^n \omega)$$

não tem derivada (n.º 127).

(*) Weierstrass: *Zur Functionen-Lehre* (*Monatsbericht der K. Akademie zu Berlin*, 1880).

(**) Representa-se por $|m|$ o módulo da quantidade m (Weierstrass).

3.ª — Uma funcção monogenea n'uma área A póde ser uma parte de outra funcção monogenea n'uma área que contenha a primeira. Assim, por exemplo, a funcção definida pela série

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

convergente quando é $|z| < 1$, faz parte da funcção $\frac{1}{1-z}$ monogenea em todo o plano, excepto no ponto $z = 1$.

Do mesmo modo, a funcção definida pela série (*)

$$f(z) = F(z) - \frac{1}{z-a} + (z-a-1)\left[\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z-a)^3} + \ldots\right]$$

é igual a $F(z)$ quando $|z-a| > 1$, e é igual ao infinito quando é $|z-a| < 1$. Logo se $F(z)$ representa uma funcção monogenea em todo o plano, $f(z)$ representa uma parte d'essa funcção monogenea.

4.ª — Quando a região do plano em que a funcção $f(z)$ é determinada se compõe de muitas áreas separadas, $f(z)$ póde representar, n'estas differentes áreas, differentes funcções monogeneas completamente independentes. Esta observação importante foi demonstrada pelo snr. Weierstrass da maneira seguinte:

Seja $\varphi(z)$ uma expressão igual a $+1$ quando $|z| < 1$, e igual a -1 quando $|z| > 1$. Pondo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \quad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

a expressão

$$F_0(z) + F_1(z)\,\varphi(z)$$

é igual a $f_1(z)$ quando $|z| < 1$, e é igual a $f_2(z)$ quando $|z| > 1$.

Ha várias expressões analyticas satisfazendo ás condições impostas a $\varphi(z)$; taes são as expressões dadas pelos snrs.

(*) Veja-se o nosso artigo: *Exemples de fonctions à espaces lacunaires* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.ª série, tomo VI.

Weierstrass (*) e Schröder (**). Aqui empregaremos para esse fim a expressão

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}(1-z)}{(1+z^{k-1})(1+z^k)}$$

estudada no n.º 125, no caso das variaveis reaes, e que tem logar tambem no caso das variaveis imaginarias. Com effeito, por ser

$$\varphi(z) = \lim_{m=\infty} \frac{1-z^m}{1+z^m}$$

conclue-se que $\varphi(z) = 1$ quando $|z| < 1$, e que $\varphi(z) = -1$ quando $|z| > 1$.

Ha muitos outros meios de formar expressões analyticas satisfazendo ás condições do theorema enunciado. Aqui exporemos ainda um, devido ao snr. Lerch, de Praga (***).

Sejam u_1 e u_2 duas funcções monogeneas independentes, e consideremos a fracção continua

$$f(z) = u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - \ldots}}$$

cujas convergentes c_{n+1} e c_n estão ligadas pela relação

$$c_{n+1} = u_1 + u_2 - \frac{u_1 u_2}{c_n},$$

ou

$$c_{n+1} c_n - (u_1 + u_2) c_n + u_1 u_2 = 0.$$

É facil de vèr que esta igualdade póde ser escripta debaixo da fórma

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_n - u_1}{c_n - u_2}$$

(*) *Weierstrass* loc. cit.
(**) *Zeitschrift* für Mathematik, 1876.
(***) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2.ª série, tomo x.

d'onde resulta

$$\frac{c_n - u_1}{c_n - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2}$$

$$\frac{c_{n-1} - u_1}{c_{n-1} - u_2} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{c_{n-2} - u_1}{c_{n-2} - u_2}$$

.....

e portanto

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} \cdot \frac{c_0 - u_1}{c_0 - u_2}$$

ou, por ser $c_0 = u_1 + u_2$,

$$\frac{c_{n+1} - u_1}{c_{n+1} - u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+2}.$$

D'esta igualdade conclue-se que $\lim_{n=\infty} c_{n+1} = u_1$ se $|u_2| < |u_1|$, e que $\lim_{n=\infty} c_{n+1} = u_2$ se $|u_2| > |u_1|$; isto é, que a expressão $f(z)$ representa u_1 na área onde é $|u_2| < |u_1|$, e que representa u_2 na área onde é $|u_2| > |u_1|$.

II

Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias

130. — *Theorema I — Se a funcção* f (z) *tiver uma derivada finita e determinada para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *para* Z *descrevendo uma recta que une estes dois pontos, será* (*)

(*) Pelas notações R [A] e I [A] representa-se a parte real e a parte imaginaria de A.

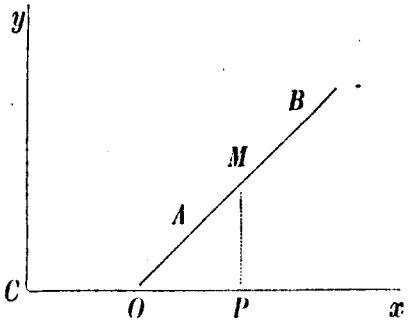
(1) $f(Z) - f(z_0) = R\,[(Z - z_0)\,f'(z_1)] + I\,[(Z - z_0)\,f'(z_2)]$

z_1 e z_2 representando dois valores de z comprehendidos no caminho seguido por z para ir de z_0 e Z. Será tambem

(2) $f(Z) - f(z_0) = \lambda\sqrt{2}\,e^{\alpha i}\,(Z - z_0)\,f'[z_0 + \theta\,(Z - z_0)]$,

λ e θ representando quantidades reaes positivas comprehendidas entre 0 e 1.

Sejam AB a recta descripta pelo ponto z; A, M e B os pontos correspondentes aos imaginarios z_0, z e Z; ω o angulo



BOx da recta com o eixo das abscissas; e ρ_0, ρ, ρ', b as distancias OA, OM, OB, CO. Será

$$z = CP + iMP = b + OP + iMP$$
$$= b + \rho\,(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega) = b + \rho\,e^{i\omega},$$

e do mesmo modo

$$z_0 = b + \rho_0\,e^{i\omega},\ Z = b + \rho'\,e^{i\omega}.$$

Logo temos

$$f(z) = f(b + \rho\,e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

e, derivando relativamente a ρ,

$$e^{i\omega}\,f'(z) = \varphi'(\rho) + i\psi'(\rho).$$

Applicando agora ás funcções $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ o theorema III do n.° 49 vem

$$\varphi(\rho') = \varphi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,\varphi'(\rho_1)$$

$$\psi(\rho') = \psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,\psi'(\rho_2),$$

ρ_1 e ρ_2 representando dois valores de ρ correspondentes a dois valores z_1 e z_2 de z comprehendidos no intervallo AB. Temos pois

$$f(Z) = \varphi(\rho') + i\,\psi(\rho')$$

$$= (\rho_0) + i\,\psi(\rho_0) + (\rho' - \rho_0)\,[\varphi'(\rho_1) + i\,\psi'(\rho_2)]$$

$$= f(z_0) + (\rho' - \rho_0)\,\left|\, R\,[e^{i\omega} f'(z_1)] + I\,[e^{i\omega} f'(z_2)]\,\right|$$

ou

$$(Z) = f(z_0) + R\,[(Z - z_0)\,f'(z_1)] + I\,[(Z - z_0)\,f'(z_2)]$$

por ser

$$(\rho' - \rho_0)\,e^{i\omega} = Z - z_0\,.$$

Está pois demonstrada a formula (1), devida a Cauchy. D'esta formula vamos deduzir a formula (2), devida ao snr. Mansion, professor na Universidade de Gand (*).

Pondo na formula (1)

$$Z - z_0 = B\,e^{ib},\ f'(z_1) = C\,e^{ic},\ f'(z_2) = D\,e^{id}$$

vem

$$f(Z) - f(z_0) = BC\cos(b + c) + BDi\,\mathrm{sen}\,(b + d) = H\,e^{ih},$$

onde

$$H^2 = B^2\,C^2\cos^2(b + c) + B^2\,D^2\,\mathrm{sen}^2(b + d)\,.$$

Suppondo agora $C > D$, vem

(*) *Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3.ª série, tomo x. A formula do snr. Mansion é análoga a outra devida ao snr. Darboux (*Journal de Liouville*, 3.ª série, tomo II) cuja demonstração é mais complicada.

$$H^2 \leqq 2\, B^2\, C^2\,,$$

e portanto

$$H = \lambda BC\,\sqrt{2}\,,$$

onde λ representa um factor positivo igual ou inferior á unidade.

Logo temos a formula

$$f(Z) - f(z_0) = \lambda\,\sqrt{2}\,e^{i\,(h\,-\,b\,-\,c)}\,(Z - z_0)\,f'(z_1)$$

que dá a formula (2) pondo $h - b - c = a$, e notando que das relações

$$Z - z_0 = (\rho' - \rho_0)\,e^{i\omega},\ z_1 - z_0 = (\rho_1 - \rho_0)\,e^{i\omega},\ \rho_1 - \rho_0 < \rho' - \rho_0$$

se tira $\rho_1 - \rho_0 = \theta\,(\rho' - \rho_0)$, e portanto

$$z_1 - z_0 = \theta\,(Z - z_0)\,,$$

θ representando uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Se fôr $D > C$, demonstra-se o theorema do mesmo modo pondo $H = \lambda BD\,\sqrt{2}$.

Do theorema que vimos de demonstrar deduz-se como no n.º 49 os dois corollarios seguintes:

1.º — Se a derivada de uma funcção é nulla n'um certo intervallo rectilineo, a funcção é constante no mesmo intervallo.

2.º — Se duas funcções tiverem a mesma derivada n'um certo intervallo rectilineo, a sua differença será constante no mesmo intervallo.

Theorema II — Se as funcções f (z) *e* F (z) *e as suas derivadas* f′ (z), f″ (z), ..., f^n (z), F′ (z), F″ (z), ..., F^m (z) *forem finitas e determinadas para todos os valores que toma z quando passa de* z_0 *e Z descrevendo uma recta que una estes dois pontos, será:*

$$\frac{f(Z)-f(z_0)-(Z-z_0)f'(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z)^l}{l\,!}f^l(z_0)}{F(Z)-F(z_0)-(Z-z_0)F'(z_0)-\ldots-\dfrac{(Z-z_0)^k}{k\,!}F^k(z_0)}$$

$$=\frac{\dfrac{(Z-z_0)^{l+1}}{(l+1)\,!}f^{l+1}(z_0)+\ldots+\dfrac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{n-1}(z_0)+R_n}{\dfrac{(Z-z_0)^{k+1}}{(k+1)\,!}F^{k+1}(z_0)+\ldots+\dfrac{(Z-z_0)^{m-1}}{(m-1)\,!}F^{m-1}(z_0)+R'_m}$$

onde

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^n[z_0+\theta(Z-z_0)]$$

$$R'_m=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^m(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)\,!}F^m[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o theorema correspondente do n.º 86, applicando o theorema anterior á funcção φ do n.º 86.

D'este theorema deduz-se, pondo

$$F(z)=(z-z_0)^{k+1},$$

o theorema seguinte:

Theorema III — Se as funcções $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^n(z)$ *forem finitas e determinadas para todos os valores que toma* z *quando passa de* z_0 *a* Z *descrevendo uma recta que une estes dois pontos será*

$$f(Z)=f(z_0)+(Z-z_0)f'(z_0)+\ldots$$

$$+\frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{n-1}(z_0)+R_n$$

onde

$$R_n=\lambda\sqrt{2}\,e^{ai}\frac{(Z-z_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^n[z_0+\theta(Z-z_0)].$$

A formula precedente é, como se vê, a *formula de Tay-*

lor que foi demonstrada primeiro no caso de variaveis reaes, e que foi entendida por Cauchy ao caso das variaveis imaginarias. A expressão que vimos de achar do resto R_n é a expressão devida ao sr. Darboux (*), com a fórma que lhe deu ultimamente o sr. Mansion (**).

131. — *Se na vesinhança do ponto* a, *a funcção* f (z) *fôr susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de* z — a, *de modo que seja*

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots + A_n(z-a)^n + \ldots$$

teremos

$$A_n = \frac{f^n(a)}{n\,!}\,.$$

Com effeito, pondo

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + A_n(z-a)^n + (z-a)^{n+1}\varphi(z, a),$$

e derivando n vezes esta igualdade relativamente a z, vem

$$f^n(z) = n\,!\,A_n + (z-a)^{n+1}\frac{d^n\varphi}{dz^n} + n(n+1)(z-a)^n\frac{d^{n-1}\varphi}{dz^{n-1}} + \ldots + (n+1)\,!\,(z-a)\varphi(z, a),$$

e pondo $z = a$

$$f^n(a) = n\,!\,A_n\,.$$

(*) *Journal de Liouville*, 3.ª série, tomo II.
(**) Loc. cit.

III

Applicações

132. — *Desenvolvimento do binomio.* — Applicando a formula de Taylor ao binomio

$$y = (1 + z)^k$$

onde k é real e z imaginario, vem como no n.º 88

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{n-1} \binom{k}{a} z^a + R_n$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2}\, e^{ai} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!} z^n (1-\theta)^{n-1} (1+\theta z)^{k-n}.$$

2) Se o módulo ρ de $z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ é menor do que a unidade, cada vez que n augmenta de uma unidade R_n adquire o factor

$$\left(\frac{k}{n} - 1\right) z \, \frac{1-\theta}{1+\theta z}$$

cujo módulo é igual ao valôr absoluto da expressão

$$M = \left(\frac{k}{n} - 1\right) \rho \, \frac{1-\theta}{\sqrt{1 + \theta^2 \rho^2 + 2\theta\rho\cos\omega}},$$

visto ser o módulo de $1 + \theta z$ igual a

$$\sqrt{1 + \theta^2 \rho^2 + 2\theta\rho\cos\omega}.$$

O producto dos dois primeiros factores de M tende para $-\rho$ quando n tende para o infinito; e o terceiro é sempre menor do que a unidade visto que o seu maior valôr $\frac{1-\theta}{1-\theta\rho}$,

que se obtem pondo $cos\ \omega = -1$, é menor do que a unidade.

Logo ha um valôr de n a partir do qual o môdulo do resto R_n adquire indefinidamente factores menores do que a unidade, e portanto R^n tende para zero quando n tende para o infinito.

Logo n'este caso, o binomio considerado póde ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$(1+z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \binom{k}{a} z^a .$$

2) Se o módulo de z é maior do que a unidade, a série precedente é divergente. Com effeito, o módulo do quociente de dous termos consecutivos d'esta série:

$$\frac{\binom{k}{a+1} z}{\binom{k}{a}} = \frac{(k-a)\,z}{a+1} = \frac{\left(\frac{k}{a} - 1\right) z}{1 + \frac{1}{a}}$$

tende para ρ quando a tende para o infinito. Logo ha um valôr de a a partir do qual os módulos dos termos da série crescem indefinidamente.

Para o estudo do caso em que o módulo de z é igual á unidade, assim como para o estudo do caso em que k é imaginario, pode-se consultar uma excellente memoria do sr. Mansion publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tomo IX).

Appliquemos agora a formula que vimos de obter á deducção d'algumas formulas de que teremos de fazer uso.

I — A funcção

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dá

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = e^{kiz} (1 - e^{-2iz})^k .$$

1) Se k é um numero inteiro positivo, vem

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \cdot \binom{k}{a} e^{(k-2a)iz}$$

$$= \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} [\cos(k-2a)z + i \operatorname{sen}(k-2a)z]$$

suppondo $\binom{k}{0} = 1$.

D'esta igualdade tira-se, se k é par,

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} \cos(k-2a)z,$$

e, se k é impar,

$$2^k i^{k-1} \operatorname{sen}^k z = \sum_{a=0}^{k} (-1)^a \binom{k}{a} \operatorname{sen}(k-2a)z.$$

Estas formulas importantes dão o desenvolvimento da potencia k de *sen* z ordenado segundo os senos ou cosenos dos arcos multiplos de z. O numero de termos d'estes desenvolvimentos é finito e os termos equidistantes dos extremos são iguaes, como é facil de vêr.

2) Se k fôr negativo ou fraccionario, as formulas precedentes ainda têem logar quando o módulo de e^{-2iz} é menor do que a unidade, isto é, supponho $z = x + iy$, quando é $e^{2y} < 1$, ou $y < 0$. N'este caso porém o numero de termos das formulas precedentes é infinito, e dão portanto o desenvolvimento de $sen^k z$ em série ordenada segundo os senos ou os cosenos dos arcos multiplos de z. Esta especie de séries de que aqui apparece o primeiro exemplo, tem uma importancia grande em Analyse, e serão estudadas n'outra parte do Curso.

Partindo da igualdade

$$(2i)^k \operatorname{sen}^k z = (-1)^k e^{-kiz} (1 - e^{2iz})^k$$

obtem-se, como no caso anterior, as formulas que dão o desenvolvimento de $sen^k z$ em série ordenada segundo os senos ou os cosenos dos arcos multiplos de z quando é $y > 0$.

II — Por uma analyse semilhante á que vem de ser empregada se acha as formulas:

$$2^k \cos^k z = \sum_{a=0}^{k} \binom{k}{a} \cos(k - 2a)\, z$$

quando k é inteiro e positivo, e

$$2^k \cos^k z = \sum_{a=0}^{\infty} \binom{k}{a} \cos(k - 2a)\, z$$

quando k é negativo ou fraccionario.

II — Reciprocamente, da igualdade

$$(\cos z + i \operatorname{sen} z)^k = (e^{iz})^k = e^{ikz} = \cos kz + i \operatorname{sen} kz,$$

onde k é inteiro e positivo, deduz-se, desenvolvendo a potencia do binomio que entra no primeiro membro e igualando separadamente as partes reaes e as partes imaginarias dos seus dois membros,

$$\operatorname{sen} kz = k \cos^{k-1} z \operatorname{sen} z - \binom{k}{3} \cos^{k-3} z \operatorname{sen}^3 z$$

$$+ \binom{k}{5} \cos^{k-5} z \operatorname{sen}^5 z - \ldots$$

$$\cos kz = \cos^k z - \binom{k}{2} \cos^{k-2} z \operatorname{sen}^2 z$$

$$+ \binom{k}{4} \cos^{k-4} z \operatorname{sen}^4 z - \ldots$$

O numero de termos d'estes desenvolvimentos é finito.

133. — *Desenvolvimento da exponencial.* — Por um calculo semilhante ao empregado no caso das variaveis reaes (n.º 92) acha-se a formula

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

$$R_n = \frac{z^n}{n!} e^{\theta z}.$$

Pondo $z = \rho\,(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$, acha-se que o módulo de R_n é

$$\frac{\rho^n}{n!}\, e^{\theta\rho\cos\omega},$$

e portanto que R_n tende para zero quando n tende para o infinito, qualquer que seja o valôr de z. Logo e^z é sempre susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z pela formula

$$e^z = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} \frac{z^a}{a!}.$$

134. — *Desenvolvimento do log* $(1+z)$. — Applicando a formula de Taylor a esta funcção, vem, como no caso das variaveis reaes,

$$\log(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{z^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{z^n}{1+\theta z}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1},$$

considerando sómente aquelle ramo de *log* $(1+z)$ cujo valôr inicial é igual a zero.

Raciocinando agora como no n.º 93 vê-se que se o módulo de z é menor do que a unidade, temos o desenvolvimento em série

$$\log(1+z) = \sum_{a=1}^{\infty}(-1)^{a-1}\frac{z^a}{a},$$

e que, se o módulo de z é maior do que a unidade, esta série é divergente.

135. — *Desenvolvimento do seno e do coseno em série.* — Por meio de uma analyse semilhante á que foi empregada no caso das variaveis reaes, é facil de vêr que as séries achadas no n.º 94 para o seno e o coseno de uma variavel real, ainda têem logar quando a variavel é imaginaria.

IV

Outros methodos para desenvolver as funcções em série

136. — O processo anterior para achar o desenvolvimento das funcções em série é raras vezes applicavel por causa da complicação da expressão do resto R_n, que é necessario discutir, para saber se R_n tende para zero quando n tende para o infinito. Recorre-se porisso n'este caso a um theorema célebre de Cauchy, que será demonstrado no Calculo Integral, e ainda a um theorema importante, devido ao snr. Weierstrass, que aqui vamos demonstrar.

Demonstremos porém primeiro os dous lemmas seguintes:

Lemma 1.º — É condição necessaria e sufficiente para que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$$

seja uniformemente convergente n'uma área dada, que a cada valòr da quantidade positiva δ, *por mais pequena que seja, corresponda um valòr* n_1 *de* n *tal que a desigualdade*

$$| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z) | < \delta$$

seja satisfeita por todos os valòres de n *superiores a* n_1, *qualquer que seja* p *e qualquer que seja o ponto que* z *represente na área considerada.*

Deduz-se facilmente este lemma da igualdade (n.º 9)

$$| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z) |$$
$$< + \sqrt{(x_{n+1} + \cdots + x_{n+p})^2 + (y_{n+1} + \cdots + y_{n+p})^2}.$$

Com effeito, se a série proposta fôr uniformemente con-

vergente na área considerada, a cada valôr de δ' e de δ'' por mais pequenos que sejam corresponderá um valôr n_1 de n (n.º 17) tal que as desigualdades

$$x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} < \delta', \; y_{n+1} + \ldots + y_{n+p} < \delta''$$

serão satisfeitas (em valôr absoluto) por todos os valores de n superiores a n_1, qualquer que seja p e qualquer que seja z dentro da área considerada. Logo tambem a desigualdade

$$| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z) | < + \sqrt{\delta'^2 + \delta''^2}$$

será satisfeita pelos mesmos valores de n, p e z, o que demonstra a primeira parte do theorema, visto que se póde sempre pôr $\delta = + \sqrt{\delta'^2 + \delta''^2}$.

Reciprocamente, se δ' e δ'' representarem dous numeros positivos tão pequenos quanto se queira, e δ um numero positivo menor do que δ' e δ'', e se fôr

$$| f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z) | < \delta$$

quando $n \geqq n_1$, qualquer que seja p e qualquer que seja o ponto representado por z dentro da área considerada, virá

$$(x_{n+1} + \ldots + x_{n+p})^2 + (y_{n+1} + \ldots + y_{n+p})^2 < \delta^2;$$

logo as desigualdades

$$x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} < \delta < \delta', \; y_{n+1} + \ldots + y_{n+p} < \delta < \delta''$$

serão satisfeitas (em valôr absoluto) pelos mesmos valores de n, p e z. A série proposta é pois uniformemente convergente na área considerada (n.º 17).

Lemma 2.º — Se a série

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \; z = x + iy$$

fôr convergente n'um circulo de raio dado, e se, em todos os pontos do interior d'este circulo que têem o mesmo módulo ρ, *o módulo de* F (z) *fôr menor do que uma quanti-*

dade positiva L, *o módulo de cada termo da série será tambem menor do que* L.

Com effeito, multiplicando a série proposta por z^{-m}, vem

$$z^{-m} F(z) = \sum_{n=1}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$$= \sum_{n=1}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} + R ,$$

R representando uma quantidade cujo módulo tende para zero quando k tende para o infinito.

Mas, como por hypothese é

$$| z^{-m} F(z) | < L\rho^{-m} ,$$

e como, por mais pequeno que seja o valôr que se attribua a uma quantidade positiva δ, ha sempre um valôr k_1 tal que é $| R | < \delta$, quando $k > k_1$, teremos (n.° 9)

$$| z^{-m} F(z) - R | < L\rho^{-m} + \delta ,$$

ou

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta .$$

Dando agora n'esta desigualdade a z os valores

$$z = \rho, \rho e^{i\theta}, \rho e^{2i\theta}, \ldots, \rho e^{(a-1)i\theta}$$

e a k um valôr maior do que os differentes valores de k_1 correspondentes a estes valores de z, temos as desigualdades

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} e^{(n-m)i\theta} \right|$$

$$< L\rho^{-m} + \delta$$

.....

que dão, sommando e attendendo ao theorema 1.º do n.º 9,

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}\right) \right.$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \left(1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}\right)$$

$$\left. + ac_m \right| < a(L\rho^{-m} + \delta),$$

ou, pondo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A$$

e dando a θ um valôr que não seja raiz da equação $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, isto é, um valôr tal que A seja finito,

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} c_n A\rho^{n-m} + ac_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n A\rho^{n-m} \right| < a(L\rho^{-m} + \delta)$$

ou

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| < L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B a parte da desigualdade precedente independente de c_m.

D'esta desigualdade tira-se

$$|c_m| \leqq L\rho^{-m} + \delta;$$

porque, se fosse

$$| c_m | > L\rho^{-m} + \delta,$$

odia dar-se a a um valôr tão grande que fosse

$$| c_m | - \frac{| B |}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

u *a fortiori*

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta,$$

visto ser (n.º 9)

$$\frac{| B |}{a} + \left| c_m + \frac{B}{a} \right| \geqq \left| c_m \right|.$$

Da desigualdade

$$| c_m | \leqq L\rho^{-m} + \delta$$

tira-se o theorema enunciado; porque, se fosse $| c_m | > L\rho^{-m}$, podia dar-se a δ um valôr tão pequeno que fosse

$$| c_m | > L\rho^{-m} + \delta.$$

137. — *Theorema.* — *Se uma funcção* f (z) *fôr susceptivel de ser desenvolvida na série uniformemente convergente dentro de um circulo de raio* R:

$$(1) \qquad f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots,$$

e se as funcções P_0 (z), P_1 (z), *etc. forem susceptiveis de ser desenvolvidas em séries ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de* z, *convergentes dentro do mesmo circulo:*

$$P_0(z) = A_0^0 + A_1^0 z + A_2^0 z^2 + \ldots + A_m^0 z^m + \ldots$$

. . . . . .

$$(2) \quad P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + A_2^{(n)} z^2 + \ldots + A_m^{(n)} z^m + \ldots$$

. . . . . .

a funcção f (z) *será tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de* z:

$$(3)\quad f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m + \ldots$$

e será

$$(4)\qquad A_m = A^0_m + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)} + \ldots$$

Este theorema foi demonstrado pelo snr. Weierstrass da maneira seguinte (*):

Seja ρ uma quantidade positiva menor do que R; por ser uniformemente convergente a série (1) na circumferencia de raio ρ, a cada valôr da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr n_1 de n tal que a desigualdade

$$| P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \ldots + P_{n+p}(z) | < \delta$$

será satisfeita por todo o valôr de n igual ou superior a n_1 e por todos os valores de z que têem o módulo ρ, qualquer que seja p.

Mas temos (n.° 15)

$$P_{n+1}(z) + \ldots + P_{n+p}(z) = A_0^{(n+1)} + A_0^{(n+2)} + \ldots + A_0^{(n+p)}$$

$$+ z\,(A_1^{(n+1)} + A_1^{(n+2)} + \ldots + A_1^{(n+p)})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ z^m (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Logo, em virtude do lemma precedente, temos a desigualdade

$$| A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots + A_m^{(n+p)} | < \delta \rho^{-m},$$

d'onde se conclue a convergencia da série (4).

Considerando agora outro numero positivo ρ_1 tal que seja

(*) *Monatsberichte der Kön. Akademie de Wissenschaften zu Berlin* — 1880.

$$R > \rho_1 > \rho ,$$

podemos dar a n um valôr tal que seja tambem

$$| A_m{}^{(n+1)} + A_m{}^{(n+2)} + \ldots + A_m{}^{(n+p)} | < \delta \rho_1{}^{-m}$$

por maior que seja p; e portanto

$$\left| \lim_{p=\infty} \left((A_m{}^{(n+1)} + A_m{}^{(n+2)} + \ldots + A_m{}^{(n+p)}) \right) \right| \leqq \delta \rho_1{}^{-m}.$$

Pondo para brevidade

$$A_m{}^{(0)} + A_m{}^{(1)} + \ldots + A_m{}^{(n)} = A'_m$$

$$\lim_{p=\infty} \left(A_m{}^{(n+1)} + A_m{}^{(n+2)} + \ldots + A_m{}^{(n+p)} \right) = A''_m$$

o que dá

$$A_m = A'_m + A''_m$$

e

$$| A''_m | \leqq \delta \rho_1{}^{-m},$$

vem, para os valores de z cujo módulo ρ é inferior a ρ_1, a desigualdade

$$| A'_0 | + | A''_1 z | + \ldots + | A''_m z^m | + \ldots$$

$$\leqq \delta \left[1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^m + \ldots \right] \leqq \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

da qual se conclue que (n.º 13, 2.º) a série:

$$A''_0 + A''z + \ldots + A''_m z^m + \ldots$$

é absolutamente convergente.

Por outra parte, é tambem convergente (n.º 15) a série

$$P_0(z) + P_1(z) + \ldots + P_n(z) = A_0{}^{(0)} + A_0{}^{(1)} + \ldots + A_0{}^{(n)}$$

$$+ z\,(A_1^{(0)} + A_1^{(1)} + \ldots + A_1^{(n)})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ z^m\,(A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots + A_m^{(n)})$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= A'_0 + A'_1 z + \ldots + A'_m z^m + \ldots$$

Temos pois

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m + A''_m) z^m$$
$$= \sum_{a=0}^{n} P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m,$$

d'onde se tira

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A''_m z^m$$

e portanto (n.º 9, 1.º)

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| \leqq \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}.$$

Como a δ se póde dar um valôr tão pequeno quanto se queira, tira-se d'esta desigualdade

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m,$$

isto é, a igualdade (3), que se queria demonstrar.

138. — *Exemplo 1.º* — A funcção

$$f(z) = \text{sen}\,(\text{sen}\,z)$$

(já considerada no n.º 94 no caso de ser z real e $|z| < 1$), dá a série

$$f(z) = 1 - \text{sen}\,z + \frac{\text{sen}^3 z}{3\,!} - \frac{\text{sen}^5 z}{5\,!} + \ldots$$

que é uniformemente convergente qualquer que seja z (n.° 17). A funcção

$$\operatorname{sen}^n z = \left(1 - z + \frac{z^3}{3\,!} - \frac{z^5}{5\,!} + \ldots\right)^n$$

póde ser desenvolvida (n.° 15) em série ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z. Logo, em virtude do theorema precedente, tambem a funcção sen (sen z) póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z, qualquer que seja z.

Exemplo 2.° — A funcção

$$f(z) = e^{(1+z)^k}$$

dá a série uniformemente convergente, qualquer que seja z,

$$f(z) = 1 + (1+z)^k + \frac{(1+z)^{2k}}{2\,!} + \frac{(1+z)^{3k}}{3\,!} + \ldots$$

1) Se k é inteiro positivo, cada termo d'esta série póde ser desenvolvido segundo as potencias de z, qualquer que seja o valôr de z, e portanto o mesmo acontece á funcção proposta.

2) Se k é negativo ou fraccionario, cada termo da série póde ser desenvolvido segundo as potencias de z, quando o módulo de z é menor do que a unidade. Logo a funcção proposta é tambem susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z, quando é $|z| < 1$.

Exemplo 3.° — Vê-se do mesmo modo que a funcção

$$f(z) = \operatorname{sen}[\log(z+1)]$$

póde ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de z quando o módulo de z é menor do que a unidade.

139. — Applicando o theorema precedente ás séries ordenadas segundo as potencias de $z - a$, sendo z variavel e a constante, deduz-se, como vamos vêr, o theorema seguinte:

Theorema. — *Se a série*

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

fôr convergente no interior de um circulo de centro a *e raio* R, *isto é, quando* $|z-a|<R$, *e se* z_0 *representar um ponto do interior d'este circulo, as derivadas* $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, *etc. serão respectivamente iguaes ás sommas das derivadas de primeira ordem, de segunda ordem, etc. dos termos da série proposta, isto é:*

$$f'(z_0) = c_1 + 2c_2(z_0-a) + \ldots + nc_n(z_0-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(z_0) = 2c_2 + 3.2c_3(z_0-a) + \ldots + n(n-1)c_n(z_0-a)^{n-2} + \ldots$$

. . . . . .

Em segundo logar, se fôr $|z_0-a| + |z-z_0| < R$, *teremos*

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0) + \ldots + \frac{(z-z_0)^n}{n!}f^n(z_0) + \ldots$$

Com effeito, pondo na série proposta $z = z_0 + h$, teremos

$$f(z_0+h) = c_0 + c_1(z_0+h-a) + \ldots$$
$$+ c_n(z_0+h-a)^n + \ldots$$

Esta série, considerada como funcção de h, é uniformemente convergente quando é $|z_0+h-a| < R$, ou *a fortiori* (n.º 9, 1.º) quando é $|z_0-a| + |h| < R$. Desenvolvendo pois os binomios que n'ella entram e ordenando o resultado segundo as potencias de h, teremos, em virtude do theorema precedente,

$$f(z_0+h) = f_0(z_0) + hf_1(z_0) + h^2 f_2(z_0) + \ldots$$

onde é

$$f_0(z_0) = c_0 + c_1(z_0-a) + \ldots + c_n(z_0-a)^n + \ldots$$

$$f_1(z_0) = c_1 + 2c_2(z_0-a) + \ldots + nc_n(z_0-a)^{n-1} + \ldots$$

. . . . . .

Pondo agora $h = z - z_0$, vem

$$f(z) = f_0(z_0) + (z - z_0) f_1(z_0) + \ldots + (z - z_0)^n f_n(z_0) + \ldots$$

com a condição $| z_0 - a | + | z - z_0 | < R$.

Para das formulas precedentes tirar o theorema enunciado basta notar que é (n.° 130)

$$f_0(z_0) = f(z_0),\ f_1(z_0) = f'(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0) = \frac{f^n(z_0)}{n!},\ \ldots$$

Corollario. — Se a série

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

fôr convergente no interior do circulo de raio R *e centro* a, *a funcção será continua dentro do mesmo circulo.*

Com effeito, em todos os pontos do interior d'este circulo $f(z)$ tem uma derivada finita e determinada.

140. — A respeito das derivadas das séries enunciaremos ainda o theorema seguinte, que se demonstra do mesmo modo que o theorema análogo relativo ás funcções de variaveis reaes (n.° 124):

Theorema. — Se a série

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

fôr convergente n'uma área dada, e se na mesma área fôr uniformemente convergente a série seguinte formada com as derivadas dos termos da precedente:

$$f'_1(z) + f'_2(z) + \ldots + f'_n(z) + \ldots,$$

será

$$f'(z) = f'_1(z) + f'_2(z) + \ldots + f'_n(z) + \ldots$$

na mesma área.

V

Funcções regulares n'uma região do plano

141. — *Definições.* — Se a funcção $f(z)$, na vesinhança do ponto z_0, fôr susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, de modo que haja um numero positivo R tal que seja

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots$$

quando $| z - z_0 | < R$, diz-se que *a funcção* f (z) *é regular no ponto* z_0.

E' facil de vêr que $(1 + z)^k$, e^z, *log* $(1 + z)$ etc. são funcções regulares em todo o plano excepto em pontos isolados.

1) O binomio $(1 + z)^k$ dá

$$(1 + z)^k = (1 + z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right]^k$$

$$= (1 + z_0)^k \sum_n \binom{k}{n} \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^k$$

quando $| z - z_0 | < | 1 + z_0 |$; e portanto é regular em todo o plano, excepto no ponto $z_0 = -1$.

2) Da série

$$e^{z - z_0} = 1 + (z - z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n\,!} + \ldots$$

tira-se

$$e^z = e^{z_0} \left[1 + (z - z_0) + \ldots + \frac{(z - z)^n}{n\,!} + \ldots\right];$$

portanto e^z é uma funcção regular em todo o plano.

3) Da igualdade

$$\log(1+z) = \log(1+z_0) + \log\left(1 + \frac{z-z_0}{1+z_0}\right)$$

$$= \log(1+z_0) + \frac{z-z_0}{1+z_0} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{z-z_0}{1+z_0}\right)^2 + \cdots,$$

que tem logar quando é $|z - z_0| < |1 + z_0|$, conclue-se que *log* $(1+z)$ é uma funcção regular em todo o plano excepto no ponto $z_0 = -1$.

4) Do mesmo modo se mostra que *sen* z e *cos* z são funcções regulares em todo o plano.

142. — *Theorema 1.°—Se uma funcção uniforme, regular em todos os pontos de uma área* A, *fôr constante em todos os pontos de uma linha finita contida na área* A, *será constante em toda a área.*

Este theorema é devido a Neumann, e foi por elle demonstrado do modo seguinte:

Representando por a o valôr de z correspondente a um ponto qualquer da linha dada, teremos para todos os valores de z representados pelos pontos de um circulo de centro a e raio R

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

ou (n.° 130)

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n\,!} f^n(a) + \cdots$$

Mas por ser constante a funcção $f(z)$ em todos os pontos da linha dada, temos

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, \text{ etc.}$$

Logo será $f(z) = f(a)$ em todo o circulo considerado.

Tomando em seguida um ponto b do circulo anterior e repetindo o raciocinio precedente demonstra-se do mesmo modo que é $f(z) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um segundo circulo, que é em parte distincto do anterior. Tomando um ponto c d'este circulo acha-se do mesmo modo $f(z)$

$= f(c) = f(b) = f(a)$ em todos os pontos de um terceiro circulo. Continuando do mesmo modo até ao contôrno da área A demonstra-se completamente o theorema.

Theorema 2.° — Se duas funcções uniformes regulares em todos os pontos de uma área A, *forem iguaes em todos os pontos de uma linha finita contida na área* A, *serão iguaes em toda a área.*

Este theorema é consequencia immediata do anterior, pois que a differença das duas funcções sendo nulla em todos os pontos da linha dada, será nulla em toda a área A.

Theorema 3.° — Se uma funcção uniforme regular no ponto a *se annulla assim como as suas derivadas até á ordem* m — 1, *quando é* z = a, *teremos*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$$

onde $\varphi(z)$ *é uma funcção uniforme regular na vesinhança do ponto* a.

Com effeito, sendo por hypothese

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - a) + \ldots + c_m (z - a)^m + \ldots$$

e $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, ..., teremos

$$f(z) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{(z - a)}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \ldots \right]$$

d'onde se tira o theorema enunciado.

Theorema 4.° — Os pontos em que uma funcção uniforme regular n'uma área A *têem um mesmo valôr, estão separados por intervallos finitos, se a funcção não é constante.*

Com effeito, por não ser constante a funcção $f(z)$ na área A, as derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, etc. não podem ser todas iguaes a zero. Chamando pois $f^m(a)$ a primeira derivada que não se annulla, teremos a differença

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z - a}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \ldots \right]$$

onde é possivel dar a $| z - a |$ um módulo tão pequeno δ, que o módulo do seu primeiro termo seja maior que o módulo

da somma dos seguintes quando $|z - a| \leqslant \delta$. Logo na circumferencia de centro a e raio δ a differença $f(z) - f(a)$ não póde ser nulla.

Theorema 5.° — A somma de duas expressões uniformes regulares em todos os pontos da área A, *é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Este theorema é uma consequencia immediata do theorema do n.° 15. Com effeito, chamando $f(z)$ e $F(z)$ as duas expressões dadas e a um ponto da área A, teremos

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

$$F(z) = C_0 + C_1(z - a) + \ldots + C_n(z - a)^n + \ldots$$

e portanto

$$f(z) + F(z) = C_0 + c_0 + (C_1 + c_1)(z - a) + \ldots$$

Theorema 6.° — O producto de duas expressões uniformes regulares em todos os pontos da área A *é uma expressão regular nos mesmos pontos.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior partindo do theorema 5.° do n.° 15.

Theorema 7.° — O quociente de duas expressões $\varphi(z)$ *e* $\psi(z)$ *uniformes e regulares na área* A *será regular nos pontos da mesma área em que o denominador* $\psi(z)$ *se não annulla.*

Com effeito, pondo

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots,$$

onde c_0 é differente de zero, teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0\left[1 + \frac{(z - a)(c_1 + c_2(z - a) + \ldots)}{c_0}\right]^{-1}$$

$$= c_0[1 + P(z - a)]^{-1},$$

pondo

$$\frac{(z - a)(c_1 + c_2(z - a) + \ldots)}{c_0} = P(z - a).$$

Dando a $|z-a|$ um valôr tão pequeno que seja $|P(z-a)|<1$, podemos desenvolver $[\psi(z)]^{-1}$ em série ordenada segundo as potencias de $z-a$, e teremos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0[1 - P(z-a) + (P(z-a))^2 - (P(z-a))^3 + \ldots]$$

Esta série é uniformemente convergente na vesinhança do ponto a assim como (n.º 15) as séries que resultam de $P(z-a)$, $(P(z-a))^2$, etc.; logo (n.º 137) a funcção $\frac{1}{\psi(z)}$ é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias de $z-a$ na vesinhança do ponto a. Esta funcção é pois regular no ponto a assim como, em virtude do theorema anterior, a funcção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(z) \cdot \frac{1}{\psi(z)}$.

VI

Funcções regulares em todo o plano

143. — A toda a funcção uniforme $f(z)$ regular em todos os pontos do plano chama-se *funcção inteira*. Taes são, entre as funcções algebricas, os polynomios raccionaes inteiros relativamente a z, e, entre as funcções transcendentes, as funcções e^z, sen z, cos z e, em geral, ás funcções que podem ser desenvolvidas na série ordenada segundo as potencias inteiras positivas de z:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

qualquer que seja z. Com effeito, estas funcções são regulares em todos os pontos do plano, pois que, desenvolvendo segundo as potencias de $z-a$ os termos da série

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a+a) + \ldots + c_n(z-a+a)^n + \ldots,$$

obtem-se, em virtude do theorema do n.º 137, o desenvolvi-

mento de $f(z)$ com série ordenada segundo as potencias de $z - a$, qualquer que seja a.

A theoria das funcções transcendentes inteiras é a continuação natural da theoria das funcções racionaes inteiras, estudada na Algebra, e as suas propriedades são, em parte, análogas ás propriedades d'estas. São tambem susceptiveis de se exprimir por um producto de factores que tornam explicitas as raizes da funcção. Este resultado importante, demonstrado primeiro por Euler, Cauchy, etc. em alguns casos particulares, foi completamente estabelecido pelo snr. Weierstrass (*). Antes porém de expôr o bello theorema devido ao eminente geometra de Berlin, vamos considerar as duas funcções *sen z* e *cos z* cuja decomposição em factores, devida a Euler, se obtem por considerações particulares.

144. — *Decomposição do seno e do coseno em factores.* — Principiemos por demonstrar o lemma seguinte:

Se u_1, u_2, etc. representarem funcções de z cujos módulos sejam menores do que um numero positivo L, o producto

$$\prod_{n=m}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$$

tenderá para a unidade, quando m tende para o infinito.

Com effeito, temos

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2} < L \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ou, reunindo os termos do segundo membro em grupos de 1, 2, 4, ..., 2^a, ... teremos,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2} < L\left[1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{(2^a)^2} + \frac{1}{(2^a+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{a+1}-1)^2}\right) + \cdots\right],$$

ou *a fortiori*, notando que a somma dos termos de cada

(*) Weierstrass: *Zur Theorie per eindeutigen analytischen Functionen einer Veranderlichen* (*Abhandlungen der K. Akademie zu Berlin* — 1876).

grupo é menor do que o producto do primeiro termo do grupo pelo numero de termos,

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|u^n|}{n^2} < L\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^a} + \ldots\right]$$

d'onde

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2} < 2L.$$

Logo a série $\sum_{1}^{\infty} \frac{|u_n|}{n^2}$ é convergente (n.° 12—1.°), e portanto (n.os 18 e 20) é tambem convergente o producto

$$\prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right),$$

e temos

$$\lim_{m=\infty} \prod_{m}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right) = \frac{\prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)}{\lim_{m=\infty} \prod_{1}^{m-1} \left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)} = 1.$$

Posto isto, vamos decompôr a funcção *sen* x em factores.

Da expressão de *sen* kz dada no n.° 132 — III tira-se, quando k é impar, pondo $cos^2 z = 1 - sen^2 z$,

$$\text{sen } kz = f(\text{sen } z),$$

onde $f(sen\ z)$ representa uma funcção inteira do grão k. Os valores de *sen* z, em numero k, que annullam esta funcção devem corresponder aos valores de z que satisfazem á equação *sen* $kz = 0$ e que dão para *sen* z valores distinctos, isto é, aos valores de z seguintes:

$$0, \pm\frac{\pi}{k}, \pm\frac{2\pi}{k}, \ldots, \pm\frac{(k-1)\pi}{2k}.$$

Logo temos

$$\operatorname{sen} kz = A \operatorname{sen} z \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right),$$

ond A é uma constante que vamos determinar. Para isso, devida-se os dous membros da igualdade precedente por kz e faça-se depois tender z para zero. O primeiro membro tendendo para a unidade e o segundo para $\frac{A}{k}$, teremos $A = k$.

Mudando na equação precedente z em $\frac{\pi z}{k}$, teremos a equação

$$\operatorname{sen} \pi z = k \operatorname{sen} \frac{\pi z}{k} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right).$$

Vamos agora procurar o limite para que tende o segundo membro d'esta equação quando k tende para o infinito.

Por tender para a unidade a razão do seno para o arco quando o arco tende para zero, é facil de vêr que, quando k tende para o infinito, teremos

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2}\right) \lim_{k=\infty} R_m$$

pondo

$$R_m = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{m\pi}{k}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{(k-1)\pi}{2k}}\right).$$

Consideremos um factor qualquer de R_m, isto é, o factor

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}}$$

onde é $n \geqq m$ e $n \leqq \frac{k-1}{2}$. Por ser (n.º 135)

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{k} - \frac{\left(\frac{n\pi}{k}\right)^3}{3\,!} \cos\theta \, \frac{n\pi}{k}$$

$$= \frac{n\pi}{k}\left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right),$$

onde θ_n representa uma quantidade inferior á unidade em valôr absoluto; e por ser

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k} = \frac{\pi^2 z^2}{k^2}(1+\varepsilon)^2,$$

onde ε representa uma quantidade infinitamente pequena quando k é infinitamente grande, teremos

$$1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{k}}{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{k}} = 1 - \frac{z^2(1+\varepsilon)^2}{n^2\left(1 - \theta_n \frac{\pi^2}{24}\right)^2} = 1 + \frac{u_n}{n^2}$$

onde u_n representa uma quantidade cujo módulo não póde ser infinito qualquer que seja n. Logo, em virtude do lemma anterior, o producto

$$R_m = \prod_m^{\infty}\left(1 + \frac{u_n}{n^2}\right)$$

tende para a unidade quando m tende para o infinito.

O producto

$$\pi z\left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{(m-1)^2}\right)$$

tenderá pois para *sen* πz quando m tende para o infinito, e teremos a formula d'Euler:

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Do mesmo modo se decompõe cos πz em factores, o que dá

$$\cos \pi z = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right).$$

145. — *Theorema de Weierstrass.* — *Sendo dada a série de quantidades* 0, a_1, a_2, ..., a_c, ... *collocadas segundo a ordem crescente dos seus módulos e que satisfaçam á condição* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *pode-se construir uma funcção transcendente inteira pela formula*

$$(1) \qquad f(z) = z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{S_c}, \; S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

cujas raizes são 0, a_1, a_2, ..., a_c, ... *e cujos respectivos gráos de multiplicidade são* n_0, n_1, ..., n_c, ...

Reciprocamente, se $f_1(z)$ *representar uma funcção inteira cujas raizes são* 0, a_1, a_2, ..., a_c, ... *e os respectivos gráos de multiplicidade* n_0, n_1, ..., n_c, ..., *esta funcção póde ser decomposta em factores que tornam explicitas estas raizes por meio da formula*

$$(2) \qquad f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{S_c},$$

onde $\varphi(z)$ *representa uma funcção inteira.*

A demonstração que aqui vamos dar d'este importante theorema é devida ao sr. Mittag-Leffler, professor na Universidade de Stockholm (*).

Da série (n.º 134)

$$\log \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = - n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

que tem logar quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$, deduz-se

$$(A) \qquad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{- n_c S_c (1, \infty)}$$

(*) *Acta Mathematica*, tomo IV.

pondo para brevidade

$$S_c(u, v) = \sum_{k=u}^{v} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

Logo temos

$$(B) \qquad \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = e^{-n_c S_c(m_c + 1, \infty)},$$

onde m_c representa um numero inteiro ou zero, devendo n'este ultimo caso considerar-se $e^{n_c S(1, m_c)}$ como representando a unidade.

Considere-se agora uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ taes que a somma $\sum_1^\infty \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valôr tão grande que seja

$$(C) \qquad n_c \mid S_c(m_c + 1, \infty) \mid < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valôr que se dê a z, que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, o que é sempre possivel por ser n'este caso uniformemente convergente a série $S_c(1, \infty)$. O producto ΠE_c, pondo

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = E_c,$$

representará uma funcção regular em todos os pontos do plano e que se annulla nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, como vamos vêr.

Consideremos um ponto qualquer z_0 do plano, e os pontos visinhos d'este, isto é, os pontos que satisfazem á condição $\mid z - z_0 \mid \leqq \rho$, onde ρ é uma quantidade finita tão pequena quanto se queira.

Por ser $\lim_{c=\infty} a_c = \infty$, é sempre possivel dar a c_1 um valôr tão grande que a desigualdade

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$$

seja satisfeita por todos os valores de c maiores do que c_1, qualquer que seja o valôr de z que satisfaça á condição $|z - z_0| \leqq \rho$.

Por outra parte, por ser convergente a série $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c_2 um valôr tão grande que, dando a δ um valôr tão pequeno quanto se queira, a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de c superiores a c_2, qualquer que seja p.

Logo as duas desigualdades precedentes serão satisfeitas ao mesmo tempo pelos valores de c maiores do que a maior das quantidades c_1 e c_2, na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leqq \rho$.

Das desigualdades precedentes e da desigualdade (C) conclue-se que a desigualdade

$$(D) \qquad \sum_{t=c}^{c+p} \left| n_t S_t (m_t + 1, \infty) \right| < \delta$$

será satisfeita por todos os valores de c superiores a c_1 e c_2 na região do plano determinada pela condição $|z - z_0| \leqq \rho$.

Por outra parte, a formula (B) dá

$$\prod_{t=c}^{c+p} E_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t (m_t + 1, \infty)}$$

d'onde se tira

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log E_t = -\sum_{t=c}^{c+p} n_t S_t (m_t + 1, \infty),$$

e, em virtude da desigualdade (D),

$$\left| \sum_{t=c}^{c+p} \log E_t \right| < \delta .$$

Logo a sèrie

$$\sum_{t=1}^{\infty} \log E_t$$

é (n.º 136) uniformemente convergente na região considerada do plano.

Posto isto, supponhamos primeiramente que z_0 é differente de a_c e que a ρ se dá um valôr tão pequeno que seja

$$| z - z_0 | < | z_0 - a_c | .$$

O segundo membro da igualdade

$$\log E_c = n_c \log \left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

$$= n_c \log \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right) + n_c \log \left(1 - \frac{z_0}{z_c}\right)$$

$$+ n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z_0 + z - z_0}{a_c}\right)^k$$

será susceptivel de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$, e temos (*)

$$\log E_c = P\,(z - z_0),$$

e portanto, applicando o theorema do n.º 137,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log E_c = P_1\,(z - z_0),$$

d'onde se tira

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1\,(z - z_0)}.$$

D'esta formula tira-se depois

(*) Empregaremos, como o sr. Weierstrass, as notações $P\,(z - z_0)$, $P_1\,(z - z_0)$, etc. para representar séries ordenadas segundo as potencias inteiras positivas de $z - z_0$.

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \ldots + \frac{P_1^n (z - z_0)}{n\,!} + \ldots$$

ou (n.º 137)

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

o que prova que a funcção $\prod_{1}^{\infty} E_c$ é regular no ponto z_0, como se queria demonstrar.

Supponhamos agora que z_0 representa uma raiz a_j da funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valôr tão pequeno que na área plana determinada pela condição $|z - a_j| \leqslant \rho$ não exista outra raiz da funcção considerada, teremos

$$\frac{\prod_{1}^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{nj}} = e^{P_3(z - a_j)}$$

visto que o primeiro membro não tem a raiz a_j; e portanto

$$\prod_{1}^{\infty} E_c = (z - a_j)^{n_j} e^{P_4(z - a_j)},$$

d'onde se conclue, como no caso anterior, que a funcção $\prod_{1}^{\infty} E_c$ é regular no ponto a_j.

As raizes a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar, são todas differentes de zero. Para que a funcção tenha tambem a raiz 0 basta multiplicar $\prod_{1}^{\infty} E_c$ por z^{n_0}. Com effeito, temos (n.º 15)

$$z^{n_0} \prod_{1}^{\infty} E_c = (z_0 + z - z_0) P_2(z - z_0) = P_5(z - z_0),$$

e portanto a nova funcção que se obtem é ainda regular em todo o plano.

De tudo o precede conclue-se a primeira parte do theorema do sr. Weirstrass, isto é, que se póde constituir pela formula (1) uma funcção que se comporta regularmente em todo o plano e que se annulla nos pontos 0, a_1, a_2, etc.

Para demonstrar a segunda parte d'este theorema, basta notar que o quociente $\frac{f_1(z)}{f(z)}$ da funcção $f_1(z)$ dada pela funcção $f(z)$, que vimos de formar, não póde ser nulla nem infinita em ponto algum do plano. Logo este quociente representa (n.º 142—7.º) uma funcção $F(z)$ regular em todo o plano que não se annulla em ponto algum.

Por ser, na vesinhança do ponto z_0,

$$F(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

onde b_0 é differente de zero, teremos

$$\log F(z) = \log b_0 + \log\left[1 + \frac{(z - z_0)(b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots)}{b_0}\right].$$

Logo se a $|z - z_0|$ se der um valôr tão pequeno que seja

$$\frac{|z - z_0|}{|b_0|}\,|b_1 + b_2(z - z_0) + \ldots| < 1,$$

teremos, em virtude do theorema do n.º 137,

$$\log F(z) = P(z - z_0),$$

e portanto a funcção $\log F(z)$ é inteira. Temos pois

$$\log F(z) = \varphi(z)$$

o que dá

$$F(z) = e^{\varphi(z)},$$

e portanto

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} \cdot f(z),$$

que é o que se queria demonstrar.

146.—*Determinação dos factores primarios das funcções inteiras.* A cada um dos factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) S_c$$

que entram na formula (2), chama o sr. Weierstrass um *factor primario* da funcção considerada $f_1(z)$. Tanto para decompôr uma funcção inteira dada em factores primarios, como para achar uma funcção inteira que tenha raizes dadas, é necessario conhecer, para cada valôr de c, um valôr de m_c que satisfaça á desigualdade (C), e para isso basta, como vamos vêr, dar a m_c um valôr tal que seja convergente a série

$$(D) \qquad \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| .$$

Com effeito, se esta série é convergente, podemos dar a ε_c o valôr

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| ,$$

chamando λ uma quantidade independente de z e de c.

Mas por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

e

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|}$$

a desigualdade (C) póde ser substituida pela seguinte:

$$(E) \qquad \left|\frac{n_c\, z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}}\right| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \varepsilon_c\,,$$

que é satisfeita, visto que se póde dar a λ o valôr maximo que toma $\dfrac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|}$ quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, isto é, o valôr $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$.

Se houver pois um valôr de m_c, constante qualquer que seja c, tal que a série (D) seja convergente, emprega-se este valôr em todos os termos das formulas (1) ou (2). No caso contrario, põe-se $m_c = c$.

Com effeito, a série (D) transforma-se então na série

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left|\frac{n_c\, z^{c+1}}{a_c^{c+1}}\right|$$

que é convergente (n.º 14, 4.º) visto que a raiz

$$\sqrt[c]{n_c \left|\frac{z}{a_c}\right|^{c+1}}$$

tende para zero quando c tende para o infinito.

147. — *Exemplo*. — Para applicar o theorema do sr. Weirstrass, procuremos a fórma geral das funcções inteiras cujas raizes são:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots,\ c,\ -c,\ \ldots$$

Como a série $\sum_{c=1}^{\infty} \left|\frac{z^2}{a_c^2}\right| = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{c^2}$ é convergente qualquer que seja z (n.º 144), podemos pôr $m_c = z$, e temos

$$f(z) = e^{\varphi(z)}\, z \prod_{c=1}^{\infty} \left[\left(1-\frac{z}{c}\right) e^{\frac{z}{c}} \left(1+\frac{z}{c}\right) e^{-\frac{z}{c}}\right],$$

ou

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

onde $\varphi(z)$ representa uma funcção inteira.

Faz parte das funcções comprehendidas na fórma precedente a funcção sen πz. N'este caso é $e^{\varphi(z)} = \pi$ (n.º **144**).

148. — *Caso em que m_c é constante.* — No caso de m_c ser constante, a funcção (2) tem propriedades notaveis que foram estudadas pelos srs. Laguerre, Cesàro, etc. A respeito d'estas funcções limitar-nos-hemos a demonstrar, no caso de $\varphi(z)$ ser constante, o theorema seguinte:

Se todas as raizes de $f_1(z)$ são reaes, tambem as raizes de $f'_1(z)$ o são.

Este theorema foi demonstrado por F. Chio nos casos de ser $m_c = 0$ e $m_c = 1$, e em seguida pelo sr. Cesàro, professor na Universidade de Palermo, no caso de m_c representar uma constante qualquer (*Giornale di Mathematiche* — tomo XXII).

A formula (2) dá

$$\log f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[n_c \log\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right].$$

Sommando as derivadas dos termos do segundo membro d'esta igualdade vem, suppondo $\varphi(z)$ constante,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left[\frac{n_c}{z - a_c} + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{a_c} \left(\frac{z}{a_c}\right)^{k-1} \right]$$

ou

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z - a_c)},$$

visto ser

$$\frac{1}{z-a_c} = -\frac{1}{a_c}\left[1+\frac{z}{a_c}+\ldots+\left(\frac{z}{a_c}\right)^{m_c-1}\right]$$

$$+\frac{z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z-a_c)}.$$

Por outra parte, da convergencia da série (*D*) conclue-se a convergencia da série

$$\lambda \sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right|;$$

e portanto a cada valôr de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr c_1 de c tão grande que as desigualdades

$$\lambda \sum_{t=1}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}} \right| < \delta, \left| \frac{z}{a_t} \right| < \varepsilon, |z| < \rho$$

serão satisfeitas pelos valores de c superiores a c_1, qualquer que seja p e por maior que seja o valôr que se dê a ρ. Logo *a fortiori* teremos finalmente

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}} \right| \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_t}\right|} < \delta$$

visto que λ representa o maximo valôr de $\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_t}\right|}$; depois

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t+1}} \right| \frac{1}{\left|1-\frac{z}{a_t}\right|} < \delta,$$

por ser

$$\left| 1 - \frac{z}{a_t} \right| > 1 - \left| \frac{z}{a_t} \right| ;$$

e finalmente

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \frac{n_t z^{m_t}}{a_t^{m_t} (z - a_t)} \right| < \delta .$$

Logo a série (F) é uniformemente convergente qualquer que seja ρ, isto é, em todo o plano.

Do que precede e do theorema do n.º 140 conclue-se

$$\frac{f'_1(z)}{f_1(z)} = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c} (z - a_c)} .$$

Posto isto, suppondo m_c constante e igual a m, e chamando z_1 uma qualquer das raizes da equação $f'_1(z) = 0$ teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c z_1^{m}}{a_c^{m} (z_1 - a_c)} = 0 ,$$

ou, pondo $z_1 = \rho (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$,

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a_c} \right)^m \cdot \frac{n_c (\cos m\omega + i \operatorname{sen} m\omega)}{\rho \cos \omega - a_c + i\rho \operatorname{sen} \omega} = 0 .$$

Esta equação parte-se nas duas seguintes das quaes uma determina ρ e a outra ω:

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c} \right)^m \left\{ \rho \cos (m-1)\omega - a_c \cos m\omega \right\} = 0$$

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c} \left(\frac{\rho}{a_c} \right)^m \left\{ \rho \operatorname{sen} (m-1)\omega - a_c \operatorname{sen} m\omega \right\} = 0$$

pondo

$$d_c = (\rho \cos \omega - a_c)^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \omega .$$

Se m é impar, multiplicando a primeira d'estas desigualdades por sen $(m-1)\,\omega$, a segunda por cos $(m-1)\,\omega$ e subtrahindo, vem

$$\operatorname{sen}\omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m-1}} = 0$$

d'onde se tira $\omega = 0$.

Se m é par, multiplicando a primeira equação por sen $m\omega$, a segunda por cos $m\omega$ e subtrahindo, vem

$$\operatorname{sen}\omega \sum_{c=1}^{\infty} \frac{n_c}{d_c\, a_c^{m}} = 0$$

d'onde se tira tambem $\omega = 0$.

Logo, em qualquer dos casos, será $z_1 = \rho$. As raizes de $f'_1(z) = 0$ são portanto reaes, como se queria demonstrar.

VI

Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados

149. — Das funcções uniformes não inteiras limitar-nos-hemos a estudar aqui as que são regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ taes que seja $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, na vesinhança dos quaes tenhamos

$$f(z) = P(z - a_c) + G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right)$$

onde

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = B_1\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + B_2\left(\frac{1}{z-a_c}\right)^2 + \cdots$$

$$+ B_m\left(\frac{1}{z-a_c}\right)^m.$$

Estes pontos são os *pontos singulares* da funcção, e foram chamados pelo sr. Weierstrass *pólos* quando m é finito, *pontos singulares essenciaes* quando m é infinito. N'outra parte d'este Curso veremos a relação que ha entre estes pontos e os pontos singulares do n.º 22.

As funcções consideradas resultam naturalmente da generalisação das funcções racionaes. Na verdade, toda a funcção racional $f(z)$ é susceptivel da decomposição (n.º 27)

$$f(z) = \Sigma \frac{A_\alpha}{(z - a_1)^\alpha} + \Sigma \frac{B}{(z - a_2)^b} + \ldots;$$

se agora z_0 representar um ponto differente de a_1, a_2, etc., temos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z_0 - a_1)^a} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_1}\right)^{-a}$$

$$+ \Sigma \frac{B_b}{(z_0 - a_2)^b} \left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_2}\right)^{-b} + \ldots$$

d'onde resulta (n.ºs 132 e 15)

$$f(z) = P(z - z_0).$$

e a funcção é portanto regular na vesinhança de z_0: se porém z_0 representa um dos pontos a_1, a_2, etc., a_1 por exemplo, applicando a decomposição anterior só ás parcellas correspondentes a a_2, a_3, etc. vem um resultado da fórma

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + P_1(z - a_1),$$

e o ponto a_1 é portanto um pólo.

Pertencem tambem ao grupo de funcções que estamos considerando as funcções que são o quociente de duas funcções transcendentes inteiras $\psi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$, isto é, as funcções da fórma

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

Com effeito, sendo a_1, a_2, ... a_c, ... as raizes do de-

nominador e n_1, n_2, ..., n_c, ... os seus respectivos gráos de multiplicidade, a funcção $f_1(z)$ será regular em qualquer ponto z_0 do plano differente dos pontos a_1, a_2, etc. (n.° 142 — 7.°); e, na vesinhança do ponto a_c, teremos (n.° 145)

$$f_1(z) = \frac{P(z-a_c)}{(z-a_c)^{n_c}\, e^{P_1(z-a_c)}}$$

$$= \frac{a_0 + a_1(z-a_c) + a_2(z-a_c)^2 + \ldots}{(z-a_c)^{n_c}}$$

$$= G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_2(z-a_c)\,.$$

Logo a funcção considerada é regular em todo o plano excepto nos pontos a_1, a_2, ..., a_c, ..., que são pólos.

150. — Para saber se um ponto a_c no qual a funcção $f(z)$ se torna infinita, é um pólo, pode-se seguir dous caminhos. O primeiro consiste em procurar se ha uma potencia de $z - a_c$ tal que o producto de $f(z)$ por essa potencia de $z - a_c$ dê uma funcção que seja regular na vesinhança do ponto a_c. Com effeito, no caso de a_c ser um pólo de $f(z)$, temos (n.° 149)

$$(z-a_c)^m f(z) = (z-a_c)^m P(z-a_c)$$

$$+ B_1(z-a_c)^{m-1} + B_2(z-a_c)^{m-2} + \ldots + B_m;$$

e reciprocamente, se $(z-a_c)^m f(z)$ é regular na vesinhança do ponto a_c, temos

$$(z-a_c)^m f(z) = A_0 + A_1(z-a_c) + \ldots + A_m(z-a_c)^m + \ldots,$$

o que dá um resultado da fórma

$$f(z) = P(z-a_c) + \frac{A_0}{(z-a_c)^m} + \frac{A_1}{(z-a_c)^{m-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{A_{m-1}}{z-a_c}\,.$$

O segundo processo consiste em procurar se a funcção

$\frac{1}{f(z)}$ é nulla e regular no ponto a_c. Com effeito, se a_c fôr um pólo, temos (n.º 149)

$$\frac{1}{(z-a_c)^m f(z)} = \frac{1}{B_m}\left[1 + \frac{(z-a_c)\varphi(z)}{B_m}\right]^{-1},$$

pondo para brevidade

$$\varphi(z) = B_{m-1} + B_{m-2}(z-a_c) + \ldots + B_1(z-a_c)^{m-2} + (z-a_c)^{m-1} P(z-a_c).$$

Dando agora a $(z-a_c)$ um valôr tão pequeno que seja

$$\left|\frac{(z-a_c)\varphi(z)}{B_m}\right| < 1$$

teremos, em virtude do theorema do n.º 137, um resultado da fórma

$$\frac{1}{(z-a_c)^m f(z)} = P_1(z-a_c),$$

d'onde se tira

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a_c)^m P_1(z-a_c),$$

e a funcção $\frac{1}{f(z)}$ é portanto nulla e regular no ponto a_c. Reciprocamente, se a funcção $\frac{1}{f(z)}$ é nulla e regular no ponto a_c, temos

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a_c)^m [A_0 + A_1(z-a_c) + \ldots + A_m(z-a_c)^m + \ldots],$$

e portanto

$$f(z) = \frac{\left[1 + \frac{(z - a_c)\,\psi(z)}{A_0}\right]^{-1}}{A_0 (z - a_c)^m}$$

pondo

$$\psi(z) = A_1 + A_2 (z - a_c) + \ldots$$

D'aqui tira-se, como no caso anterior, um resultado da fórma

$$f(z) = \frac{P(z - a_c)}{(z - a_c)^m}$$

quando $\left|\frac{(z - a_c)\,\psi(z)}{A_0}\right| < 1$, ou ainda um resultado da fórma

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - a_c)^m} + \frac{c_1}{(z - a_c)^{m-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{c_{m-1}}{z - a_c} + P_1 (z - a_c);$$

o ponto a_c é pois um pólo da funcção $f(z)$.

151. — Assim como acontece com as funcções racionaes, as funcções que estamos estudando são susceptiveis de uma decomposição que torna explicitos os pólos e os pontos essenciaes da funcção. Esta propriedade importante, estabelecida pelo sr. Weierstrass no caso de ser finito o numero de pontos singulares da funcção, foi em seguida estendida pelo sr. Mittag-Leffler ao caso de a funcção conter um numero infinito de pólos ou pontos essenciaes. Antes porém de demonstrar o bello e importante theorema devido ao sabio professor da Universidade de Stockholm, vamos considerar o caso da funcção cot z cuja decomposição se obtem de um modo muito simples e dá origem a algumas formulas importantes.

A formula (n.° 144)

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{c^2 \pi^2}\right)$$

dá

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{c^2\pi^2}\right)$$

e, derivando relativamente a z (n.º 140),

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2\pi^2}$$

ou

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi}\right).$$

Esta formula dá a decomposição de cot z em fracções simples que tornam explicitos os pólos $0, +\pi, -\pi, +2\pi, \ldots, +c\pi, \ldots$ da funcção.

Do que precede tiram-se as seguintes consequencias importantes:

I — Desenvolvendo o binomio que entra no segundo membro da penultima formula, vem

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2\pi^2} + \frac{z^2}{c^4\pi^4} + \frac{z^4}{c^6\pi^6} + \ldots\right)$$

quando é (n.º 132) $|z| < \pi$; e portanto, em virtude do theorema do n.º 132,

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2S_2}{\pi^2} z - \frac{2S_4}{\pi^4} z^3 - \frac{2S_6}{\pi^6} z^5 - \ldots$$

pondo

$$S_2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c_2}, \quad S_4 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{c^4}, \text{ etc.}$$

Esta formula dá o desenvolvimento de cot z em série ordenada segundo as potencias de z, e vê-se que este desenvolvimento tem logar quando é $|z| < \pi$.

II — Por ser

$$z \cot z = \frac{iz\left(e^{2iz} + 1\right)}{e^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$

vem (n.º 81, V)

$$\left(\frac{d \,.\, z \cot z}{dz}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^n \,.\, z \cot z}{dz^n}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} (2i)^n B_{n-1},$$

B_{n-1} designando os numeros de Bernoulli; e temos portanto tambem, applicando a formula de Maclaurin,

$$z \cot z = 1 - \frac{2^2 B_1}{2!} z^2 - \frac{2^4 B_3}{4!} z^4 - \frac{2^6 B_5}{6!} z^6 - \ldots$$

Igualando os coefficientes das potencias de grão $2m-1$ de z nos dous desenvolvimentos de cot z que vimos de obter, resulta a relação importante:

$$\frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_{2m-1}}{(2m)!} = S_{2m} .$$

III — Do desenvolvimento de cot z que vimos de obter, póde tirar-se o desenvolvimento de tang z, de sec z e de cosec z em série ordenada segundo as potencias de z, desenvolvendo os segundos membros das formulas conhecidas:

$$\text{tang } z = \cot z - 2 \cot 2z$$

$$\text{cosec } z = \cot z + \tan \tfrac{1}{2} z$$

$$\sec z = \text{tang } z \text{ cosec } z;$$

e vê-se que a primeira e a terceira funcção são susceptiveis d'este desenvolvimento quando é $|z| < \frac{\pi}{2}$, e a segunda quando é $|z| < \pi$.

152. — *Theorema de Mittag-Leffler.* — *Dadas as quantidades* $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ *que satisfaçam á condição* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *e dadas as funcções de* $\frac{1}{z-a_c}$

$$G_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), G_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ldots, G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right), \ldots$$

que são da fórma

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = A_1\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + A_2\left(\frac{1}{z-a_c}\right)^2 + \ldots,$$

é sempre possivel formar uma funcção $f_c(z)$ *da fórma*

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

que seja regular em todos os pontos do plano differentes de $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ *e que na vesinhança d'estes pontos se possa pôr debaixo da fórma*

$$f(z) = P(z-a_c) + G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right).$$

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ *regular em todo o plano excepto nos pontos* $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$, *que são pólos ou pontos singulares essenciaes e que satisfazem á condição* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *póde ser reduzida á fórma*

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

onde $\varphi(z)$ *representa uma funcção inteira de* z.(*).

Por ser uniformemente convergente a série

$$G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-1} - \frac{A_2}{a_c^2}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{-2} + \ldots$$

quando z é differente de a_c, e por ser cada termo d'esta série susceptivel de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de z quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, teremos em virtude do theorema do n.° 137

(*) *Mittag-Lefler: Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes etc.* (*Acta Mathematica* — tomo IV).

$$(A) \qquad G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

quando é $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

Consideremos agora, como no n.º 145, uma série de quantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ taes que a somma $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ seja convergente, e dê-se a m_c um valôr tão grande que seja

$$(B) \qquad \left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \varepsilon_c$$

qualquer que seja o valôr que se attribua a z que satisfaça á condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < |\varepsilon| < 1$, o que é sempre possivel por ser uniformemente convergente a série anterior na região do plano determinada pela condição $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$. A somma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z),$$

pondo

$$F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k,$$

satisfará ás condições do theorema enunciado, isto é, representará a funcção $f_1(z)$ como vamos vêr.

Seja z_0 um ponto do plano differente dos pontos a_1, a_2, etc., e ρ uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Por ser $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, e por ser convergente a série $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$, é sempre possivel dar a c um valôr tão grande que as desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \quad \sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

sejam satisfeitas ao mesmo tempo por todos os valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | < \rho$, qualquer que seja p e por mais pequeno que seja o valôr que se dê a δ.

D'estas desigualdades e da desigualdade (B) conclue-se que a desigualdade

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_t+1}^{\infty} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t}\right)^k \right| < \delta$$

ou (form. A)

$$\sum_{t=c}^{c+p} | F_t(z) | < \delta \quad .$$

será tambem satisfeita pelos valores de c superiores a c_1, na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | \leqq \rho$.

Logo a série

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$$

é uniformemente convergente na região definida pela condição $| z - z_0 | < \rho$.

Posto isto, como z_0 é differente de a_c, supponhamos que se dá a ρ um valôr tão pequeno que seja

$$| z - z_0 | < | z_0 - a_c | .$$

O segundo membro da igualdade

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \frac{A_1}{z_0 - a_c}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{(z_0 - a_c)^2}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-2} + \ldots$$

é susceptivel (n.º 137) de ser desenvolvido em série ordenada segundo as potencias de $z - z_0$ na região do plano determinada pela condição $| z - z_0 | < \rho$; logo o mesmo acontece

à funcção $F_c(z)$ e temos (n.º 137)

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0) .$$

A funcção $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ é pois regular no ponto z_0.

Consideremos agora um ponto singular a_j de funcção que queremos formar. Dando n'este caso a ρ um valôr tão pequeno que na região determinada pela condição $|z - a_j| \leqq \rho$ não exista outro ponto singular da funcção considerada, teremos

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j) ,$$

visto que o primeiro membro não tem o ponto singular a_j, e portanto

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) + P_3(z - a_j) .$$

Os pontos singulares a_1, a_2, etc. da funcção que vimos de formar são differentes de zero. Para que o ponto 0 seja um ponto singular da funcção, de modo que na vesinhança d'este ponto tenhamos

$$f(z) = P_2(z - z_0) + G_0\left(\frac{1}{z}\right)$$

pondo

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = A_1\left(\frac{1}{z}\right) + A_2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots ,$$

basta pôr

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right) .$$

Com effeito, a funcção

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z_0\left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)}\right)$$

é (n.º 137) regular na vesinhança de qualquer ponto z_0 differente de 0; e na vesinhança do ponto 0 a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ é regular.

De tudo o que precede conclue-se que a funcção $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ tem todas as propriedades enunciadas na primeira parte do theorema do sr. Mittag-Leffler, e representa portanto a funcção $f(z)$ que queriamos formar.

Para demonstrar a segunda parte basta notar que a differença

$$f_1(z) - \sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$$

não tem pontos singulares, e portanto é igual a uma funcção inteira $\varphi(z)$.

153. — *Quociente de duas funcções inteiras.* — Vimos já (n.º 142 — 7.º) que o quociente de duas funcções inteiras é regular em todo o plano excepto nos pontos que são raizes do denominador, que são pólos. A estas funcções é applicavel pois o theorema do sr. Mittag-Leffler, isto é, podem ser reduzidas á fórma

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = \varphi(z) + \sum_{1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z-a_c}\right) + P_c(z)\right].$$

Reciprocamente, toda a funcção $f_1(z)$ regular em todo o plano, excepto nos pontos $a_1, a_2, \ldots a_c, \ldots$ que são pólos, é o quociente de duas funcções inteiras. Com effeito, chamando n_1, n_2, etc. os expoentes dos factores $(z-a_1)^{n_1}$, $(z-a_2)^{n_2}$, etc. pelas quaes é necessario multiplicar $f_1(z)$ para fazer desapparecer os pólos, e construindo por meio do theorema do sr. Weierstrass uma funcção inteira $\varphi_2(z)$ cujas raizes sejam a_1, a_2, etc. com os gráos de multiplicidade n_1, n_2, etc., o producto $f_1(z) \cdot \varphi_2(z)$ é regular em todo o plano, e representa portanto uma funcção inteira $\varphi_1(z)$. Te-

mos pois

$$f_1(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}.$$

154. — *Determinação de* m_c. — Para se applicar o theorema do sr. Mittag-Laffler é necessario conhecer um valôr de m_c tal que a desigualdade (B) seja satisfeita. Para esse fim dá o sr. Weierstrass o processo seguinte.

Tome-se uma quantidade ε_0 comprehendida entre ε e 1 e determine-se uma quantidade g tal que para todos os valores de z que têem o módulo $\varepsilon_0 \mid a_c \mid$ seja

$$\left| G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right)\right| \leqq g;$$

será então (n.º 136 — 2.º)

$$\mid A_k^{(c)} \mid \leqq g\varepsilon_0^{-k}$$

e portanto, quando $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$,

$$\left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| \leqq g \sum_{k=m_c+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^k$$

ou, por ser $\varepsilon_0 < \varepsilon$,

$$\left| \sum_{k=m_c+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| \leqq \frac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{m_c+1}.$$

Logo pode-se tomar para m_c o mais pequeno valôr que satisfaz á desigualdade

$$\frac{g}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{m_c+1} < \varepsilon_c.$$

INDICE

INTRODUCÇÃO

CAPITULO I

THEORIA DOS IMAGINARIOS E REGRAS PARA O SEU CALCULO

	Numeros
I Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra	1-2
II Theoria analytica dos imaginarios. . . .	3-4
III Theoria geometrica dos imaginarios . . .	5-8
IV Operações sobre imaginarios	9
V Séries	10-17
VI Productos infinitos	18-20
VII Fracções continuas	21

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS, LOGARITHMICAS, ETC.

I Principios geraes	22-24
II Funcções algebricas.	25-28
III Funcções exponenciaes, logarithmicas e circulares	29-32

CALCULO DIFFERENCIAL

CAPITULO I

NOÇÕES PRELEMINARES

	Numeros
I Noção de limite, de continuidade, de infinitamente pequeno e de derivada	33-39
II Methodo dos limites. Methodo infinitesimal. Origem do Calculo infinitesimal.	40-44

CAPITULO II

DERIVADAS DE PRIMEIRA ORDEM DAS FUNCÇÕES

I Theoremas geraes	45
II Derivadas das funcções algebricas, logarithmicas e circulares	46
III Funcções implicitas	47-48
IV Relações entre as funcções e suas derivadas.	49
V Derivadas das funcções de variaveis imaginarias	50-51
VI Funcções de muitas variaveis.	52-57
VII Derivadas dos determinantes. Determinantes funccionaes	58-60
VIII Derivada de limites de sommas. Derivada de um arco de curva	61-62
IX Mudança das variaveis.	63-65

CAPITULO III

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DOS PRINCIPIOS PRECEDENTES

I Curvas planas	66-70
II Curvas no espaço	71-72

	Numeros
III Superficies	73-74
IV Curvas e superficies envolventes	75-76

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES DE ORDEM QUALQUER

I Formação das derivadas de ordem qualquer .	77-79
II Applicações	80-83
III Differenciaes d'ordem superior.	84-85
IV Relações entre as funcções e suas derivadas .	86-87

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I Desenvolvimento em série de algumas funcções algebricas	88-91
II Desenvolvimento em série de algumas funcções transcendentes.	92-94
III Interpolação	95-96
IV Desenvolvimento em série das funcções implicitas	97
V Maximos e minimos	98-100
VI Indeterminações	101-102

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I Curvas planas	103-113
II Curvas no espaço	114-117
III Superficies	118-121

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

	Numeros
I Funcções definidas por séries	122-124
II Singularidades de algumas funcções . . .	125-127

CAPITULO VIII

FUNCÇÕES DE VARIAVEIS IMAGINARIAS

I Definições e principios geraes	128-129
II Extensão da formula de Taylor ás funcções de variaveis imaginarias	130-131
III Applicações	132-135
IV Outros methodos para desenvolver as funcções em série	136-140
V Funcções regulares n'uma região do plano .	141-142
VI Funcções regulares em todo o plano . . .	143-148
VII Funcções uniformes regulares em todo o plano, excepto em pontos isolados	149

NOTA

THEORIA DOS NUMEROS IRRACIONAES, DOS NUMEROS NEGATIVOS E DOS NUMEROS IMAGINARIOS. REGRAS PARA O SEU CALCULO

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

1. — Os numeros inteiros e os numeros fraccionarios cujos numeradores e denominadores são numeros inteiros constituem os numeros *racionaes*. O seu estudo foi o objecto principal da Arithmetica. Ahi foram definidos, assim como as operações a que se sugeitam, e ahi foram estudadas as propriedades fundamentaes d'estas operações.

Em seguida, na Algebra, em logar de numeros consideram-se lettras que os representavam, e definiram-se as operações algebricas pelas leis fundamentaes das operações arithmeticas, isto é, da maneira seguinte:

1.° — *Addição* dos numeros representados pelas lettras a e b é a combinação d'estes numeros cujas leis fundamentaes são:

1) $a + b = b + a$

2) $(a + b) + c = (a + c) + b$

3) $a + 0 = a$;

2.º — *Subtracção* é a operação inversa da somma.

3.º — *Multiplicação* é a combinação dos numeros representados pelas lettras a e b, caracterisada pelas leis:

1) $ab = ba$

2) $(ab)\,c = (ac)\,b$

3) $(a + b)\,c = ac + bc$

4) $a \times 0 = 0$, $a \times 1 = a$.

4.º — *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.º — *Elevação a potencias* é a multiplicação de factores iguaes.

6.º — *Extracção da raiz* é a operação inversa da elevação a potencias.

Reflectindo um pouco sobre o que se aprendeu na Arithmetica, é facil de vêr que todo o calculo arithmetico é fundado nas leis fundamentaes precedentes, e nas leis fundamentaes da transformação das igualdades:

1) Se fôr $a = b$. será $b = a$

2) Se fôr $a = b$ e $a = c$, será $b = c$

3) Se fôr $a = b$ e $c = d$, será $ac = bd$, etc.

Duas das operações precedentes, isto é, a subtracção e a divisão são sempre possiveis usando dos numeros considerados na Arithmetica. Para não termos porém de separar os casos em que estas operações são ou não são possiveis, introduzem-se novos numeros mais geraes do que os precedentes e definem-se as suas operações de modo que os resultados a que levem sejam applicaveis áquelles. E' o que vamos vêr.

II

Theoria dos numeros irracionaes (*)

2. — **I** — Os numeros irracionaes apparecem primeiro na Algebra pela consideração dos radicaes. Com effeito, por não ser sempre possivel a operação $\sqrt[n]{b}$ empregando os numeros racionaes, somos levados a considerar o signal $a + \sqrt[n]{b}$ como representando numeros de uma nova especie, que contém os numeros racionaes quando é $b = 0$, e que quando b é differente de zero tomam o nome de numeros *irracionaes*.

Para sugeitar estes numeros ao calculo torna-se necessario definir as suas operações de modo que subsistam as propriedades fundamentaes enunciadas no n.º precedente. Só d'este modo serão os resultados a que se chega por meio d'estes numeros, applicaveis ao caso particular dos numeros racionaes.

1.º — Dous numeros irracionaes $a + \sqrt[n]{b}$ e $c + \sqrt[n]{d}$ dizem-se iguaes quando é $a = c$ e $b = d$.

2.º — Chama-se *addição* dos dous numeros $a + \sqrt[n]{b}$ e $c + \sqrt[n]{d}$ a operação determinada pela igualdade

$$(a + \sqrt[n]{b}) + (c + \sqrt[n]{d}) = a + c + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{d} .$$

3.º — Chama-se *multiplicação* dos dous numeros $a + \sqrt[n]{b}$ e $c + \sqrt[n]{d}$ a operação determinada pela igualdade

$$(a + \sqrt[n]{b})(c + \sqrt[n]{d}) = ac + a\sqrt[n]{d} + c\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{bd} .$$

(*) Consultem-se a respeito da theoria dos numeros irracionaes as obras seguintes:
Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen (Brunswick, 1872).
Heine: Die Elemente der Functionenlehre (*Jornal de Crelle*, t. 74).
Tannery: Introduction à la theorie des fonctions, (Paris, 1886).

4.º — Chama-se *subtracção* e *divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

E' facil de vêr que as operações assim definidas gozam das propriedades enunciadas no n.º 1, e que dão origem ás regras relativas ao calculo dos radicaes conhecidas dos Elementos d'Algebra.

Os numeros irracionaes appareceram tambem na Geometria Elementar debaixo de um ponto de vista mais geral do que o precedente, como limites de uma série de numeros racionaes. E' debaixo d'este ponto de vista que vamos agora estudal-os.

II — Diz-se que um numero racional, variavel e crescente u_n cujos valores successivos são u_1, u_2, etc., tende para um *limite* racional a quando n augmenta indefinidamente, se os numeros u_1, u_2, etc. se approximam successivamente de a, de modo que a cada valôr que se dê ao numero arbitrario δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valôr n_1 de n tal que seja (em valôr absoluto)

$$u_n - a < \delta$$

quando $n > n_1$.

Se o numero racional u_n crescer á medida que n augmenta, sem todavia poder jámais exceder um numero racional determinado, e não tender para um limite racional, diz-se, por definição, que tende para um *numero irracional* (que representaremos por lim u_n) maior do que qualquer dos numeros racionaes u_n ou inferiores a u_n e menor do que qualquer dos outros.

E' evidente que a definição precedente comprehende os numeros irracionaes a que se foi conduzido nos Elementos pela extracção das raizes.

Dous numeros irracionaes lim u_n e lim v_n dizem-se *iguaes* quando todos os numeros racionaes menores do que um são tambem do que o outro. E' evidente que a igualdade assim definida goza das propriedades fundamentaes das igualdades enunciadas no n.º 1.

Diz-se que lim u_n é maior do que lim v_m quando existe algum numero racional maior do que lim v_n, e menor do que lim u_n.

Definamos agora as operações sobre numeros irracionaes.

1.º — Chama-se *addição* de dous numeros irracionaes lim u_n e lim v_m a operação que tem por fim determinar o numero racional ou irracional para que tende a somma $u_n + v_m$ quando n e m augmentam indefinidamente.

Para justificar esta definição, notemos primeiro que por serem, por hypothese, u_n e v_m menores do que dous numeros determinados, a somma $u_n + v_m$ será tambem menor do que um numero determinado igual á somma d'estes; logo a somma $u_n + v_m$ tende para um numero racional ou irracional.

Notemos em seguida que este limite é sempre o mesmo qualquer que seja o modo como n e m augmentem. Com effeito, se c e c' fossem dous numeros correspondentes a dous modos differentes de crescimento de n e m, e considerassemos um terceiro numero c'' definido por todos os numeros racionaes que definem c e c', todos os numeros racionaes inferiores a c e c' seriam evidentemente inferiores a c'', e portanto seria $c = c''$ e $c' = c''$, d'onde $c = c'$.

Notemos finalmente que a somma de numeros irracionaes, como vimos de a definir, goza das propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1, como é facil de vêr.

2.º — Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição; isto é, a operação que tem por fim, sendo dado a somma lim u_n de dous numeros e uma parcella lim v_m, achar a outra lim w_i.

3.º — Chama-se *multiplicação* de dous numeros irracionaes lim u_n e lim v_m a operação que tem por fim achar o numero racional ou irracional para que tende o producto $u_n v_m$ quando n e m augmentam indefinidamente.

Justifica-se esta operação exactamente do mesmo modo que se justificou a operação da somma.

5.º — Chama-se *divisão* a operação inversa da multiplicação.

III — Consideremos agora a série de numeros racionaes ou irracionaes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, que augmentam, diminuem ou oscillam indefinidamente quando n augmenta. Diz-se n'este caso que u_n tende para um limite racional ou irracional a, quando n augmenta indefinidamente, se os numeros u_1, u_2, etc. se approximam de a, de modo que a cada valôr que se dê ao numero arbitrario δ, por mais pequeno que seja, corresponda um valor n_1 de n tal que seja (em valôr absoluto)

$$u_n - a < \delta$$

quando $n > n_1$.

Para conhecer quando u_n tende para um limite, emprega-se o theorema seguinte devido a Cauchy:

E' condição necessaria e sufficiente para que u_n tenda para um limite quando n augmenta indefinidamente, que, a cada valôr dado a δ, por mais pequeno que seja, corres-

ponda um valòr n_1 de n tal que a desigualdade

$$u_{n+p} - u_n < \delta \tag{1}$$

seja satisfeita (em valòr absoluto) pelos valores de n superiores a n_1 qualquer que seja p.

Com effeito, se u_n tende para um limite a, a cada valòr de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valòr n_1 de n tal que as desigualdades (em valòr absoluto)

$$u_{n+p} - a < \tfrac{1}{2}\delta,\ u_n - a < \tfrac{1}{2}\delta$$

serão satisfeitas quando $n > n_1$. Logo tambem será satisfeita pelos mesmos valores de n e p a desigualdade (1), visto que o valòr absoluto da differença $u_{n+p} - u_n$ é menor do que a somma dos valores absolutos de $u_{n+p} - a$ e $u_n - a$.

Demonstremos agora que, reciprocamente, quando a desigualdade (1) tem logar, u_n tende para um numero racional ou irracional (*).

Dê-se a δ um valòr particular δ_1, e chame-se a o valòr correspondente de n e α_1 um qualquer dos valores de u_{a+p}. Por ser

$$u_{a+p} - \alpha_1 < \delta_1,\ u_a - \alpha_1 < \delta_1,$$

os numeros u_{a+p} estão comprehendidos entre $\alpha_1 - 2\delta$ e $\alpha_1 + 2\delta$, e *á fortiori* entre $\alpha_1 - 4\delta$ e $\alpha_1 + 4\delta$.

Dê-se em seguida a b o valòr δ_2 menor do que $\frac{\delta_1}{2}$, e chame-se $b < a$ o valòr correspondente de n e α_2 um qualquer dos valores de u_{b+p}. Os numeros u_{b+p} estão comprehendidos entre $\alpha_2 - 2\delta_2$ e $\alpha_2 + 2\delta_2$, e, como α_2 está comprehendido entre $\alpha_1 - 2\delta_1$ e $\alpha_1 + 2\delta_1$, $\alpha_2 - 2\delta_2$ e $\alpha_2 + 2\delta_2$ estão comprehendidos entre $\alpha_1 - 3\delta_1$ e $\alpha_1 + 3\delta_1$ e portanto entre $\alpha_1 - 4\delta_1$ e $\alpha_1 + 4\delta_1$.

Continuando do mesmo modo, formam-se duas séries, uma de numeros crescentes

$$\alpha_1 - 4\delta_1,\ \alpha_2 - 4\delta_2,\ \ldots,\ \alpha_i - 4\delta_i,\ \ldots$$

e outra de numeros decrescentes

(*) *Dini: Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa, 1878.

$$\alpha_1 + 4\delta_1,\ \alpha_2 + 4\delta_2,\ \ldots,\ \alpha_i + 4\delta_i,\ \ldots,$$

e os numeros $u_{n_i + p}$ estão comprehendidos entre os numeros $\alpha_i - 4\delta_i$ e $\alpha_i + 4\delta_i$, cuja differença tende para zero á medida que i augmenta.

Seja agora

$$v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_i,\ \ldots$$

a serie de numeros crescentes que se forma tomando um numero racional entre cada par de numeros da primeira das series precedentes; e seja

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_i,\ \ldots$$

a serie corresponde relativa á segunda. Os numeros $u_{n_i + p}$ estão comprehendidos entre os numeros v_i e w_{i+1}, cuja differença tende para zero á medida que i augmenta. A primeira série tende para um numero racional ou irracional c á medida que i augmenta, e como a differença entre $u_{n_i + p}$ e v_i tende para zero, os numeros $u_{n_i + p}$ tendem tambem para c quando i augmenta.

Corollario. — *Se u_n diminue ou augmenta sempre quando n augmenta, u_n tende para um numero racional ou irracional.*

Com effeito, quando u_n diminue, se u_1, u_2, etc. não tendessem para um numero racional ou irracional, haveria sempre um valôr de δ e de p tal que o valôr absoluto da differença $u_{n+p} - u_n$, isto é $u_n - u_{n+p}$, seria maior do que δ, por maior que fosse n. Teriamos pois

$$u_n - u_{n+p} > \delta,\ u_{n+p} - u_{n+2p} > \delta,\ \ldots,$$

e portanto

$$u_n - u_{n+kp} > k\delta,$$

d'onde se se concluiria que u_{n+kp} tende para $-\infty$ quando k tende para ∞, o que é contrario á hypothese.

Do mesmo modo se considera o caso em que u_n augmenta.

3. — *Representação geometrica dos numeros irracionaes.* — Sabe-se pelos Elementos de Geometria que toda a re-

cta póde ser representada por um numero racional ou irracional, tomando outra recta para unidade. Vamos agora demonstrar que, reciprocamente, todo o numero irracional póde ser representado por uma recta. Com effeito, representando sobre uma recta, a partir de de um ponto A, todos os numeros racionaes menores do que os numeros u_n, que entram na definição do numero irracional lim u_n, obtem-se uma série de pontos que representaremos por M. Do mesmo modo os numeros maiores do que u_n darão outra série de pontos que representaremos por N. Por ser sempre $AN > AM$, as duas séries de pontos estão separadas por um ponto k, e a distancia Ak representa o numero irracional considerado.

Ás operações sobre numeros racionaes e irracionaes correspondem combinações de rectas, isto é, operações geometricas assim definidas:

1.° — Addição de duas rectas dadas é a operação que tem por fim procurar a recta que resulta de collocar uma das rectas dadas adiante da outra de modo que uma principie onde a outra termina.

2.° — Multiplicação de duas rectas é a operação que tem por fim procurar a recta que é quarta proporcional entre as rectas dadas (meios) e a unidade (extremo).

3.° — Chama-se *subtracção* e *divisão* as operações inversas da addição e da multiplicação.

E' facil de vêr, com effeito, que as operações que vimos de definir gozam das propriedades fundamentaes expostas no n.° 1, e portanto que a estas combinações é applicavel o calculo arithmetico.

4. — *Potencias irracionaes dos numeros.* — E' bem conhecida desde os Elementos de Algebra a significação do signal a^u quando u representa um numero racional inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo, e viu-se que em todos estes casos tem logar a igualdade fundamental

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}.$$

Resta definir este mesmo signal quando u é um numero irracional. Seja primeiro a maior do que a unidade e sejam $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ os numeros crescentes com n, mas inferiores a um numero α, que determinam o numero irracional $u = \lim u_n$. Os numeros $a^{u_1}, a^{u_2}, \ldots, a^{u_n}, \ldots$ crescem tambem quando n augmenta, sem poderem todavia exceder o numero a^{α}. Tendem pois para um numero irracional lim a^{u_n}.

que tomaremos para definição do signal a^u. E' facil de vêr que a igualdade fundamental das potencias tem logar no caso das potencias irracionaes; pois que, sendo $v = \lim v_n$ outro nnmero irracional, temos

$$a^u \cdot a^v = \lim (a^{u_n} \cdot a^{v_n}) = \lim a^{u_n + v_n}$$

$$= a^{\lim (u_n + v_n)} = a^{u+v} .$$

Quando é $a < 1$, póde pôr-se $a = \frac{1}{a'}$ onde é $a' > 1$, e temos a igualdade $a^u = \frac{1}{a'^u}$ que define a^u.

Nota. — A respeito de a^u faremos ainda a observação seguinte, de que teremos de fazer uzo: *Quando u tende para o limite zero, a^u tende para a unidade.*

Seja $a > 1$, unico caso que nos importa considerar. Se u fôr positivo, ponhamos $u \leqq \frac{1}{m}$, m representando um numero inteiro que tende para o infinito quando u tende para zero. Da desigualdade

$$\left(1 + \frac{a-1}{m}\right)^m = 1 + a - 1 + \binom{m}{2}\left(\frac{a-1}{m}\right)^2 + \ldots > a$$

ou

$$a^u - 1 = a^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{a-1}{m}$$

tira-se que $a^u - 1$ tende para zero quando u tende para zero, visto ser $a^u > 1$ e $\frac{a-1}{m}$ tender para zero quando m tende para o infinito.

Quando u é negativo ponhamos $u = -y$, o que dá a igualdade

$$a^u - 1 = -\frac{a^y - 1}{a^y},$$

do qual se tira ainda o principio enunciado.

III

Numeros negativos e numeros imaginarios

5. — *Numeros negativos.* — Consideremos a differença $a - b$ entre dous numeros a e b. Se fôr $b > a$, a subtração precedente é impossivel empregando os numeros até aqui estudados. Considera-se porisso $a - b$ como definindo uma nova especie de numeros, a que se chama *numeros negativos*.

Definida assim esta especie de numeros, resta definir as operações a realisar com elles de modo que se sugeitem ás propriedades fundamentaes indicadas no n.º 1.

1.º — Dous numeros $a - b$ e $c - d$ dizem-se iguaes quando é

$$a + d = b + c .$$

2.º — Chama-se *addição* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b) + (c - d) = a + c - (b + d).$$

3.º — Chama-se *multiplicação* de dous numeros $a - b$ e $c - d$ a operação definida pela igualdade

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (bc + ad).$$

E' muita facil de vêr que as operações assim definidas gozam das propriedades fundamentaes enunciadas no n.º 1, e que dão origem ás regras bem conhecidas da Algebra.

6. — I — *Numeros imaginarios.* — A extracção de raiz das quantidades negativas é uma operação impossivel usando dos numeros precedentemente estudados. D'ahi vem a necessidade de introduzir uma nova especie de numeros da fórma $a + b\sqrt{-1}$, a que se chama *numeros imaginarios* ou *numeros complexos*, e que comprehendem todos os precedentes como caso particular.

Para introduzir estes numeros no calculo é necessario definir as operações que sobre elles se devem executar de modo que se sugeitem ás leis fundamentaes expostas no n.º 1.

1.º — Dous numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ dizem-se *iguaes* quando é $a = c$, $b = d$.

Diz-se que o numero imaginario $a + b\sqrt{-1}$ é maior do que o numero imaginario $c + d\sqrt{-1}$ quando é $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$.

2.º — Chama-se *addição* dos numeros imaginarios dous $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = a + c + (b + d)\sqrt{-1}.$$

3.º — Chama-se *subtracção* a operação inversa da addição.

4.º — Chama-se *multiplicação* dos numeros $a + b\sqrt{-1}$ e $c + d\sqrt{-1}$ a operação definida pela igualdade

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = ac - bd + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

5.º — Chama-se *divisão* do numero $a + b\sqrt{-1}$ pelo numero $c + d\sqrt{-1}$ a operação inversa da multiplicação, isto é, a operação que tem por fim achar um numero $x + y\sqrt{-1}$ que multiplicado por $c + d\sqrt{-1}$ dê $a + b\sqrt{-1}$.

Temos pois

$$a + b\sqrt{-1} = (x + y\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1})$$

ou

$$a + b\sqrt{-1} = cx - dy + (dx + cy)\sqrt{-1},$$

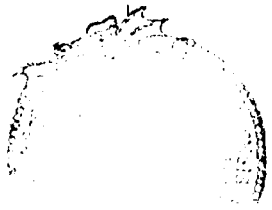
d'onde se tira

$$a = cx - dy,$$

$$b = dx + cy.$$

Estas equações dão os valores de x e y que entram no quociente pedido, e vem

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}.$$



INDICE

PAG.

DISCURSO DE ABERTURA 5

I Organisação:

Pessoal do quadro legal da Academia 17
Pessoal não pertencente ao quadro legal 21
Lentes jubilados 22
Cadeiras 23
Plano dos estudos dos diversos cursos 27
Condições da admissão dos alumnos 41
Dias e horas das aulas e dos exercicios 42
Livros que servem de texto 43
Estabelecimentos da Academia 46

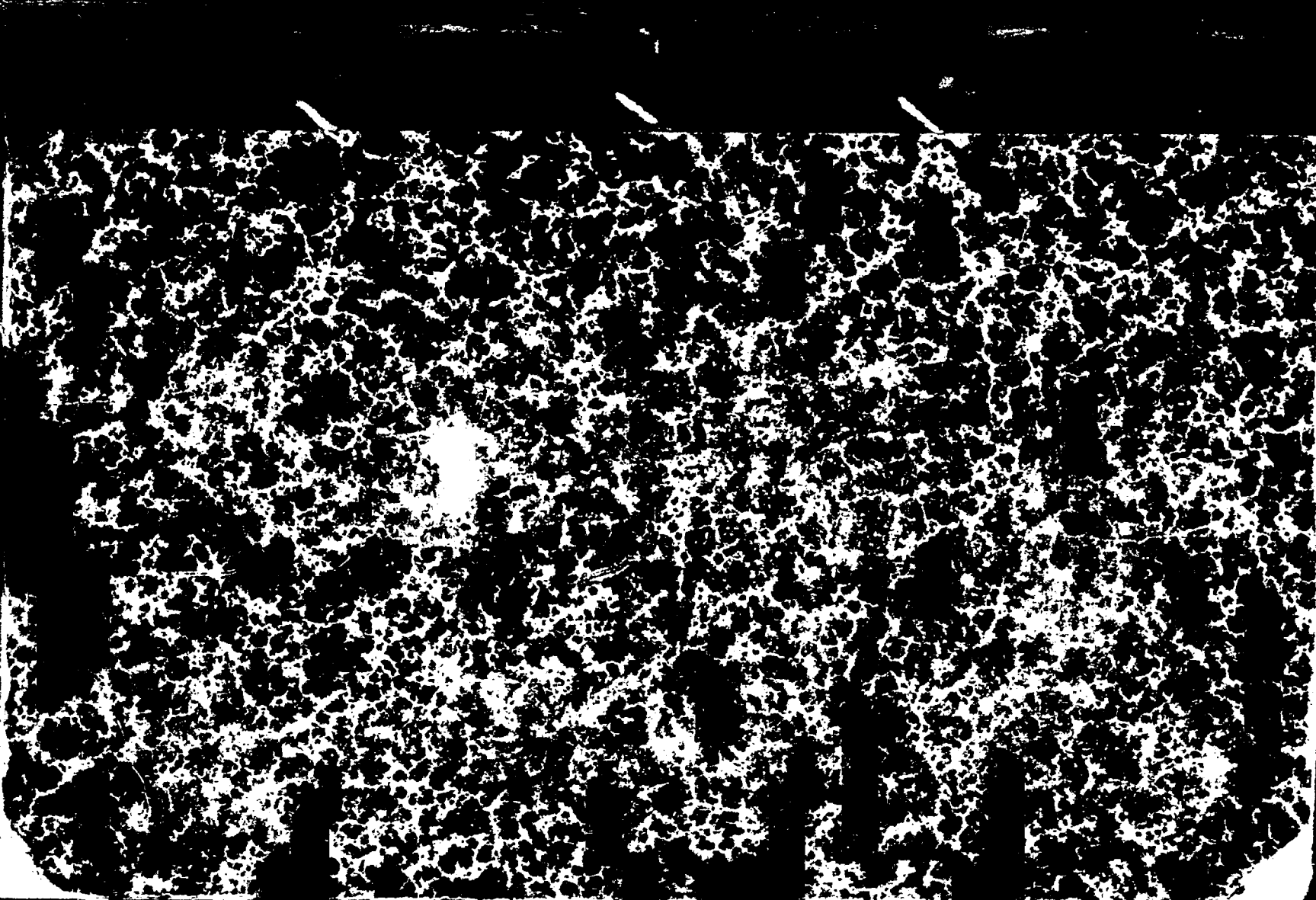
II Estatistica:

Lista alphabetica dos alumnos 53
Quadro estatistico dos alumnos segundo a sua naturalidade . . . 65
Quadro do exercicio dos cursos do anno lectivo de 1886-87 . . . 69
Alumnos premiados e distinctos 70
Classificação dos alumnos que terminaram o 3.º anno d'engenheria . 73
Alumnos que tiraram carta de capacidade 74
Mappa estatistico do movimento dos alumnos 75

III Legislação:

DECRETOS

de 14 d'agosto de 1885, sobre a collocação de 2 lentes 79
de 23 de setembro de 1885, sobre a collocação de varios lentes . . 79
Aposentação dos empregados civis 81
Reforma dos empregados e operarios não comprehendidos no decreto d'esta data, ácerca das aposentações dos empregados civis . . . 90
de 23 d'agosto de 1886, regulamentando o Decreto n.º 1 de 17 de julho de 1886 97
Carta de lei de 1 de setembro de 1887 regulando o vencimento d'exercicio aos professores d'instrucção superior 108
Decreto de 17 de fevereiro de 1887 modificando o decreto regulamentar de 22 de agosto de 1865 112
de 5 de janeiro de 1888, ampliando o n.º 4.º, § 1.º do art. 8.º do Decreto regulamentar de 22 d'agosto de 1865 114

PROGRAMMAS.

SECÇÃO SCIENTIFICA: Fragmentos de um curso d'analyse infinitesimal.