ANNUARIO
DA
ACADEMIA POLYTECHNICA
DO
PORTO

ANNUARIO

DA

ACADEMIA POLYTECHNICA

DO

PORTO

ANNO LECTIVO DE 1886-1887

(decimo anno)

PORTO
Typographia Occidental
66, Rua da Fabrica, 66

1886

RELATORIO DOS FACTOS MAIS IMPORTANTES

QUE TIVERAM LOGAR NA

ACADEMIA POLYTECHNICA

NO ANNO LECTIVO DE 1886-1887

LIDO PELO DIRECTOR DA MESMA ACADEMIA

Na Sessão Publica de 18 d'outubro de 1886

SENHORES!

E' PRAXE seguida n'esta Academia, assim como em muitos institutos scientificos da mesma natureza, ser lido, no dia da inauguração solemne dos estudos, o relatorio dos factos mais importantes da vida academica relativos ao anno lectivo anterior. Obrigado este anno a cumprir pela primeira vez este dever, sinto-me perturbado; porque, inexperiente na arte da palavra, não posso corresponder á solemnidade do dia e á illustração do auditorio, que me escuta. Preciso por isso, Senhores, de toda a vossa benevolencia e espero-a, porque benevolas são sempre as assembleias illustradas.

Passo pois, Senhores, a relatar-vos os principaes successos da nossa Academia no anno lectivo findo, referindo-me successivamente á frequencia, ao regulamento dos serviços academicos, aos gabinetes de trabalhos practicos, á bibliotheca, ás obras do edificio, ao Annuario e finalmente ás modificações que tiveram logar no pessoal academico.

Senhores, o anno que terminou foi o primeiro depois da reforma importante porque passou a Academia, da qual o meu illustre antecessor vos deu noticia no relatorio do anno anterior. Em virtude d'ella, alguns alumnos de outros estabelecimentos de ensino vieram continuar os seus cursos no nosso, cujas portas gostosamente se lhes abriram, e que lhes offerecia as mesmas vantagens, que aquelles d'onde chegavam; e quatorze alumnos militares obtiveram licença para aqui virem estudar o curso preparatorio para a Escóla do Exercito.

O numero dos alumnos que frequentaram as aulas da Academia foi de 220. Este numero tem augmentado desde 1876 para cá, e é de crêr que continue a augmentar, graças ao maior numero de garantias, que hoje se lhes offerece. No Annuario d'este anno vereis qual o numero dos estudantes que terminaram os diversos cursos da Academia, numero que não se póde ainda apurar para d'elle vos dar hoje noticia.

Pelo relatorio do anno anterior sabeis que, logo no principio do anno lectivo, o Conselho se occupou da discussão de um regulamento dos serviços academicos, cuja necessidade ha muito se fazia sentir, e que depois da ultima reforma se tornára urgente. Hoje tenho apenas a informar-vos de que o projecto de regulamento, approvado pelo Conselho, foi enviado ao Governo, que sobre elle mandou ouvir o Conselho Superior de Instrucção Publica. Consta-me que esta illustrada corporação se tem occupado já d'este assumpto, mas ainda não apresentou ao Governo o seu parecer.

Ha poucos annos ainda um illustre professor d'esta Academia, n'este mesmo logar e em occasião analoga, chamava a attenção para a necessidade do estudo practico das sciencias experimentaes, e para a necessidade impreterivel de organisar os gabinetes de maneira a poder-se ministrar aos alumnos um tal ensino.

Os poucos meios de que então dispunha a Academia não lhe permittiam realisar em pouco tempo esta justa aspiração.

Felizmente a nova lei, que reorganisou este instituto, veio-lhe melhorar um pouco as circumstancias economicas. Determinando que os excessos de receita, creada por essa lei sobre a despesa por ella occasionada, passem a favor da Academia, permittio que se podesse attender melhor ás necessidades dos gabinetes d'ensino practico. No anno lectivo findo o gabinete de Cinematica, o unico d'esta natureza, que existe no paiz, e que é destinado a auxiliar o ensino da Cinematica pelo systema Reuleaux, foi augmentado com uma das séries de apparelhos d'este systema. Para a collecção d'instrumentos geodesicos e topographicos foi adquirido um theodolito, e foram votados meios, no ultimo conselho, para a compra de um tachéometro, ficando assim com os dois instrumentos, de que mais necessidade havia em vista do estudo da topographia, a que principalmente se deve attender n'um estabelecimento scientifico da indole do nosso. Ao gabinete de Mineralogia foram tambem distribuidos alguns fundos para se obterem os mineraes mais necessarios para o ensino d'esta sciencia. Para o Laboratorio chimico compraram-se alguns productos necessarios para o ensino practico, que n'elle se dá aos alumnos, e que está a uma altura, que por certo não fica inferior ao que se lhes ministra nos outros laboratorios do paiz.

Como vêdes, Senhores, se não podemos conseguir gabinetes completos, como teem os estabelecimentos scientificos mais bem dotados do que o nosso, ou que em longo espaço de tempo os foram pouco a pouco formando, vamos ao menos obtendo o que é necessario para as necessidades do ensino.

A Bibliotheca foi tambem enriquecida com algumas obras de valor. Compraram-se alguns livros de Engenharia relativos principalmente ás cadeiras ultimamente creadas, e compraram-se duas collecções scientificas importantes relativas a assumptos mathematicos: o *Jornal de Crelle* e o *Jornal de Liouville* (1.ª série).

Uma das maiores necessidades da nossa Academia, e para que devemos chamar principalmente a attenção dos poderes superiores é a continuação das obras do edificio.

No anno lectivo findo expropriaram-se as lojas situadas nos baixos do edificio do lado da rua do Anjo (n.º 1 a 9) e do lado do Campo dos Martyres da Patria (n.º 93 e 94). Apropriou-se para sala d'estudo e para exercicios de Geometria Descriptiva uma das velhas salas do edificio, do lado do passeio da Graça. Finalmente está-se procedendo á reparação da parte exterior do edificio do lado das lojas expropriadas e do lado oeste, juncto ao Gabinete de Physica.

Além d'isso está pendente da approvação do governo um pedido de auctorisação para se expropriarem mais algumas lojas e para se construir uma sala para aulas.

Todos estes esforços porém serão ineficazes, se não forem concedidos outros meios, além dos que actualmente temos, para dar desenvolvimento ás obras. N'este sentido já consultou, nas suas duas sessões de 1885 e d'este anno, o Conselho Superior de Instrucção Publica.

Não é porém, Senhores, só ao paiz que compete attender a esta grande necessidade; é tambem ao districto, e principalmente á cidade do Porto, que mais lucra com este melhoramento.

Uma cidade importante d'Italia, Turin, offerece bello exemplo de tal proceder. As corporações, que administram o municipio e a provincia de Turin, resolveram concorrer com metade da despeza para a substituição dos edificios da Universidade, velhos e acanhados para as necessidades do ensino, por outros á altura da cidade e dos créditos d'este importante estabelecimento scientifico.

Oxalá que este exemplo da cidade italiana seja algum dia imitado pelos homens illustres, que administram o districto e o municipio do Porto.

Continuou a publicar-se o Annuario da Academia como nos annos anteriores. No ultimo volume veio desenvolvida a organisação da Academia segundo a lei de 21 de julho e o decreto de 10 de setembro de 1885. A vantagem de tornar bem conhecidas do paiz as condições actuaes do nosso instituto levou o meu illustre antecessor a duplicar a tiragem do Annuario para poder ser distribuido com profusão. Foi este Annuario illustrado com um magnifico retrato do nosso excellente collega Wenceslau de Lima, cuja chapa foi offerecida pelo snr. Ferreira da Silva. Era na verdade de justiça que o primeiro volume do Annuario posterior á reforma da Academia fosse illustrado com o retrato do promotor d'essa reforma.

Tivemos durante o anno lectivo algumas modificações no pessoal docente. Jubilou-se, logo no principio do anno lectivo, o snr. Conselheiro Adriano Machado, o professor erudito, que tanto brilho deu a este instituto, e que actualmente no logar difficil de Reitor da Universidade de Coimbra, está prestando áquelle estabelecimento scientifico os serviços, que havia a esperar do seu talento, do seu caracter e da sua practica dos negocios da instrucção publica.

Entraram para a Academia durante o anno dois novos professores. Para a cadeira de Montanistica e Docimasia foi despachado o snr. Manoel Rodrigues de Miranda, cujas qualidades de professor distincto eram já bem conhecidas pelo seu ensino no Instituto industrial e n'esta mesma Academia, onde já regêra em commissão a cadeira de Mineralogia.

Para a cadeira de Geometria Descriptiva entrou o snr. Duarte Leite Pereira da Silva, que ha pouco terminára a sua formatura nas faculdades de Mathematica e Philosophia da Universidade de Coimbra com o nome dos mais laureados.

É costume, Senhores, no dia solemne da inauguração dos estudos lembrar os collegas que se finaram durante o ultimo anno lectivo. Cumpro pois o doloroso dever de vos fallar de José Pereira da Costa Cardoso, fallecido a 22 de fevereiro do anno lectivo findo.

Nasceu Pereira Cardoso n'esta cidade do Porto no dia 6 d'outubro de 1831, e era filho do honrado negociante d'esta praça Manoel José Pereira da Costa.

Fez no Lyceu Nacional d'esta cidade os seus exames de preparatorios, e em seguida matriculou-se em 1847 n'esta Academia Polytechnica, onde frequentou as cadeiras do 1.º e 2.º anno de Mathematica, e a cadeira de Physica, obtendo em todas ellas o primeiro premio.

Animado por este resultado dos seus esforços, resolveu ir matricular-se na Universidade de Coimbra, que pelas suas tradições, pela sua organisação superior e pela altura do seu ensino, correspondia melhor ás suas elevadas aspirações. Ahi frequentou as faculdades de Mathematica e Philosophia continuando a obter, como no Porto, os primeiros premios em todas as cadeiras. Formou-se em ambas as faculdades em 1855, e habilitado com informações distinctissimas, obtidas na formatura, resolveu concorrer á maior das honras, que a Universidade confere aos seus escolhidos, doutorando-se na faculdade de Mathematica em 1857.

Aqui termina a carreira do estudante distincto para principiar a do professor, que o não foi menos.

Despachado primeiro para o logar de substituto extraordinario da faculdade de Mathematica em 3 de julho de 1861, pouco tempo prestou á Universidade os serviços, que do seu talento e saber tinha a esperar; porque em 5 de fevereiro de 1864 foi encarregado de reger em commissão uma cadeira de Mathematica n'esta Academia, e mais tarde, a 14 d'abril de 1869 foi d'ella nomeado definitivamente professor por proposta feita ao governo pelo conselho escolar.

Nas diversas cadeiras que regeu desde a data da sua entrada para a Academia até á sua jubilação, mereceu sempre a estima dos seus discipulos pela bondade do seu caracter e pela clareza da sua exposição.

Não foi só no professorado que Pereira Cardoso occupou um logar elevado; foi tambem na politica, foi tambem na industria, foi tambem no commercio.

Elevado ao pariato fez algumas vezes ouvir a sua voz na camara, merecendo sempre a attenção e respeito de todos os partidos.

Na industria occupou o logar de director da Companhia de Fiação de Negrellos. No commercio occupou o logar de director da Companhia dos Vinhos do Alto Douro.

Em resumo, Senhores, Pereira Cardoso tinha uma bella intelligencia e um bello coração. Dão testemunho da sua intelligencia os factos, que singelamente vimos de narrar. A bondade do seu coração manifesta-se por esse acto generoso, bem conhecido de todos, da doação á Misericordia do Porto da quantia de 12 contos de reis para a sustentação de uma enfermaria para tysicos, commemorando assim a morte de uma filha victimada por tão terrivel doença.

Eis-me chegado, Senhores, ao fim do meu relatorio, por certo cheio de defeitos e lacunas, para que peço a vossa indulgencia. Resta-me agora cumprir o mais agradavel dos deveres inherentes ao logar que occupo. Refiro-me á distribuição dos diplomas de premio e accessit aos estudantes que, durante o anno lectivo findo, os conquistaram pelo seu talento e estudo.

Estudiosos academicos!

Quando medito sobre os resultados obtidos pela sciencia durante o decurso dos seculos, fico maravilhado de quanto póde a intelligencia e a vontade do homem.

O homem conhece o movimento dos astros, de modo a poder assignar-lhes as posições que, devem ter no espaço em qualquer época; mede-lhes as distancias; pesa-os; determina-lhes os volumes; pela analyse da luz, que emitem, conhece as substancias de que são compostos.

O homem prediz os eclipses, o terror da antiguidade.

Descobriu a bussola e o sextante, que o dirigem na amplidão do mar.

Explicou as marés, o arco-iris, a miragem do deserto.

Pela electricidade escreve a distancia, falla a distancia, transmitte a força a distancia.

Mediu a velocidade do som, a velocidade da luz, a velocidade da electricidade. Inventou o telescopio para vêr o infinitamente grande; inventou o microscopio para vêr o infinitamente pequeno.

O homem foi buscar ao vapor a prodigiosa força que o transporta sobre o mar e sobre a terra, a prodigiosa força, que dá movimento a milhares de machinas usadas na industria.

O homem preparou essa multiplicidade de principios, de que a Medicina se aproveita para combater as doenças, que nos affligem.

O homem tem rectificado rios, tem aberto canaes, tem construido pórtos, onde a natureza os não abrira, tem cortado isthmos para unir os mares, tem furado as montanhas para dar passagem ás estradas.

. . . .

Mas para estas conquistas da sciencia, quantos mathematicos eminentes, quantos naturalistas insignes, quantos philosophos profundos não consumiram a vida em longos annos de estudo e meditação? Senhores, é grande a difficuldade da sciencia. Vencei-a com perseverança no estudo. Trabalhai para serdes uteis á patria, para serdes uteis á humanidade.

DISSE

I—PESSOAL

A—Pessoal do quadro legal da Academia

1. Direcção

Francisco Gomes Teixeira, doutor na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo lente da mesma faculdade, socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Costa Cabral, 132.

2. Corpo docente

Francisco de Salles Gomes Cardoso, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra e capitão de mar e guerra.

Mathosinhos—Rua Direita, 20.

Francisco da Silva Cardoso.

Rua da Alegria, 341.

José Joaquim Rodrigues de Freitas, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, socio correspondente da Academia Real de Sciencias de Lisboa, etc.

Travessa de Santa Catharina, 52.

Antonio Alexandre Oliveira Lobo, bacharel formado na faculdade de Direito.

Rua do Principe, 50.

Adriano de Paiva de Faria Leite Brandão, doutor na faculdade de Philosophia e bacharel na de Mathematica da Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

Quinta de Campo Bello (Gaya).

Joaquim de Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, antigo professor no Lyceu Nacional do Porto, etc.

Rua dos Fogueteiros, 1.

Antonio Joaquim Ferreira da Silva, bacharel formado na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, director do Laboratorio Municipal de chimica do Porto, etc.

Rua da Alegria, 929.

José Diogo Arroyo, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra.

Foz—Praça de Cadouços, 16.

Manoel da Terra Pereira Vianna, bacharel formado nas faculdades de Mathematica e de Philosophia da Universidade de Coimbra, engenheiro pela Eschola de Pontes e Estradas de Paris, e professor do Instituto Industrial do Porto.

Hotel Francfort.

Wenceslau de Sousa Pereira Lima, doutor na faculdade de Philosophia da Universidade de Coimbra, membro do

Conselho Superior de Instrucção Publica, e deputado ás côrtes.

Rua de Cedofeita, 137.

Roberto Rodrigues Mendes, bacharel na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, e capitão d'estado maior d'engenheria.

S. Lazaro, (Hotel America).

Luiz Ignacio Woodouse, bacharel formado em Mathematica pela Universidade de Coimbra.

Rua do Breyner, 118.

Manoel Amandio Gonçalves, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 881.

Duarte Leite Pereira da Silva, bacharel formado em Mathematica e Philosophia pela Universidade de Coimbra.

S. Lazaro, 118.

Manoel Rodrigues de Miranda Junior, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, professor do Instituto Industrial do Porto.

Cedofeita, 468.

Guilherme Antonio Corrêa, professor do Instituto Industrial do Porto.

Coronel Pacheco, 21.

*

3. Secretaria

Secretario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, bacharel formado em Direito pela Universidade de Coimbra.

Rua das Vallas, 301.

4. Bibliotheca

Bibliothecario.—*Bento Vieira Ferraz d'Araujo*, (interinamente).

5. Jardim Botanico

Guarda-primeiro official do Jardim Botanico.—*Joaquim Casimiro Barbosa*, (interinamente).

Massarellos, 43.

6. Laboratorio Chimico

Guarda-preparador do Laboratorio Chimico.—*Augusto Wenceslau da Silva*, bacharel formado em Philosophia pela Universidade de Coimbra.

Santa Catharina, 612.

7. Gabinete de physica

Guarda-demonstrador de physica experimental.—*Bernardo Maria da Motta*, (interinamente).

Travessa do Bolhão, 114.

8. Guarda-mór

Guarda-mór.—*Joaquim Filippe Coelho*, no edificio da Academia.

9. Empregados subalternos

Guarda subalterno, servindo de ajudante de bibliothecario.—*José Mendes Moreira*, Campo Alegre, 433.

Guarda subalterno.—*Antonio Correia da Silva*, no edificio da Academia.

Guarda subalterno.—*Francisco Martins Ferreira Borges*, Ferraria, 139.

Servente do Laboratorio chimico e do gabinete de Physica.—*Domingos Gomes da Cruz*, travessa de S. Dionisio, 99.

Servente da secretaria e porteiro.—*João Antonio Pereira*, Travessa de S. Roque, 7.

B — Pessoal não pertencente ao quadro legal

---

1. Pago pela dotação do expediente, e dos estabelecimentos academicos

Amanuense da secretaria.—*Eduardo Lopes*, rua da Alegria, 293.

Hortelão do Jardim botanico.—*Joaquim José Tavares*, no Jardim.

Servente do Jardim botanico.—*Alberto Ferreira*, idem.

2. Pagos pela dotação para as obras do edificio da Academia e serviço para escripturação e inspecção das obras

Amanuense da commissão das obras.—*J. Filippe Coelho.*

Guarda apontador das obras.—*Joaquim de Sousa Seabra*, rua 9 de julho, 37.

C—Lentes jubilados

Arnaldo Anselmo Ferreira Braga, do conselho de Sua Magestade, e bacharel formado nas faculdades de Medicina e Philosophia da Universidade de Coimbra.

Breyner, 104.

Gustavo Adolpho Gonçalves e Sousa, engenheiro civil pela Academia Polytechnica do Porto, director e professor do Instituto Industrial do Porto.

Principe, 158.

Pedro de Amorim Vianna, bacharel formado na faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra, antigo professor no lyceu nacional de Lisboa.

Setubal.

Adriano d'Abreu Cardoso Machado, ministro e secretario d'Estado honorario, do conselho de Sua Magestade, doutor da faculdade de Direito da Universidade de Coimbra, antigo lente substituto ordinario da mesma faculdade, e reitor da Universidade de Coimbra.

II—CADEIRAS

1.ª CADEIRA

Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Luiz Ignacio Woodouse.*

2.ª CADEIRA

Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Dr. Francisco Gomes Teixeira.*

3.ª CADEIRA

Mechanica racional; cinematica.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *Joaquim d'Azevedo Sousa Vieira da Silva Albuquerque.*

4.ª CADEIRA

Geometria descriptiva:—*1.ª parte.*—Geometria descriptiva e projectiva; grapho-estatica.—3 lições semanaes. —*2.ª parte.*—Applicações de geometria descriptiva.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Duarte Leite Pereira da Silva.*

5.ª CADEIRA

Astronomia e geodesia:—*1.ª parte.*—Astronomia e geodesia.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Topographia.—1 lição semanal.—Vaga. Rege interinamente o lente proprietario da primeira.

6.ª CADEIRA

Physica:—*1.ª parte.*—Physica geral.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Physica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. Adriano de Paiva de Faria Leite Brandão.*

7.ª CADEIRA

Chimica inorganica.—*1.ª parte.*—Chimica inorganica geral.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Chimica inorganica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. José Diogo Arroyo.*

8.ª CADEIRA

Chimica organica e analytica:—*1.ª parte.*—Chimica organica geral e biologica.—2 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Chimica analytica.—1 lição semanal.—*3.ª parte.*—Chimica organica industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Joaquim Ferreira da Silva.*

9.ª CADEIRA

Mineralogia; paleontologia e geologia.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Dr. Wenceslau de Sousa Pereira Lima.*

10.ª CADEIRA

Botanica:—*1.ª parte.*—Botanica.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Dr. Francisco de Salles Gomes Cardoso.*

11.ª CADEIRA

Zoologia:—*1.ª parte.*—Zoologia.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Zoologia industrial. Materias primas de origem animal.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Manoel Amandio Gonçalves.*

12.ª CADEIRA

Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções. Materiaes de construcção. Resistencia dos materiaes. Grapho-estatistica applicada. Processos geraes de construcção.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Roberto Rodrigues Mendes.*

13.ª CADEIRA

Hydraulica e machinas, curso biennal.—*1.º anno.*—Hydraulica. Machinas em geral. Machinas hydraulicas.—3 lições semanaes.—*2.º anno.*—Thermodynamica; machinas thermicas. Motores electricos. Machinas diversas. Construcção de machinas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel da Terra Pereira Vianna.*

14.ª CADEIRA

Construcções e vias de communicação, curso biennal.—*1.º anno.*—Edificios. Abastecimento de aguas e esgotos. Hydraulica agricola. Rios e canaes. Portos de mar e pharoes.—3 lições semanaes.—*2.º anno.*—Estradas. Caminhos de ferro. Pontes.—3 lições semanaes.—Vaga. Rege-a interinamente o lente proprietario da 12.ª cadeira.

15.ª CADEIRA

Montanistica e docimasia, curso biennal.—*1.º anno.* —*1.ª parte.*—Docimasia.—1 lição semanal.—*2.ª parte.* —Metallurgia.—2 lições semanaes.—*2.º anno.*—Arte de minas.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Manoel Rodrigues de Miranda Junior.*

16.ª CADEIRA

Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação.—*1.ª parte.*—Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial.—2 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial.—1 lição semanal.—Lente proprietario *Antonio Alexandre Oliveira Lobo.*

17.ª CADEIRA

Commercio, curso biennal.—*1.º anno.*—*1.ª parte.*— Calculo commercial. Escripturação em geral e especialmente dos bancos.—2 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Contabilidade industrial.—1 lição semanal.—*2.º anno.*—Economia commercial e geographia commercial.—3 lições semanaes. —Lente proprietario *José Joaquim Rodrigues de Freitas.*

18.ª CADEIRA

Desenho.—*1.ª parte.*—Desenho de figura, paizagem e ornato.—3 lições semanaes.—*2.ª parte.*—Desenho de architectura e aguadas.—3 lições semanaes.—*3.ª parte.*— Desenho topographico. Desenho de machinas (esboços á vista acompanhados de cótas, para reduzir a desenho geometrico.—3 lições semanaes.—Lente proprietario *Francisco da Silva Cardoso.*

II

Plano dos estudos dos diversos cursos da Academia Polytechnica

(*DECRETO DE 10 DE DEZEMBRO DE 1885*)

I — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE OBRAS PUBLICAS

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II.	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	
5.º ANNO		
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
30. Construcções I ou II.	6	.
23. Projectos de construcções	.	2
25. Projectos de hydraulica e machinas I ou II.	.	6
Exercicios praticos de topographia . . .	.	2
Missões.		
	20	10
	30	

6.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
32. Construcções II ou I	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
33. Projectos de construcções II ou I	.	6
27. Projectos de machinas II ou I	.	6
Missões.		
	14	12
	26	

II — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS DE MINAS

1.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral.	6	.
15. Chimica analytica.	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	12	14
	26	
3.º ANNO		
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo. .	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
	16	8
	24	
4.º ANNO		
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II.	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia . .	6	.
18. Botanica geral.	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II . .	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
5.º ANNO		
9. Topographia	2	.
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
37. Montanistica e docimasia I ou II	6	.
25. Projectos de hydraulica e machinas	.	6
38. Projectos de arte de minas	.	6
Exercicios praticos de topographia	.	2
Missões.		
	20	14
	34	
6.º ANNO		
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
34 e 35. Montanistica e docimasia II ou I	6	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
27. Projectos de machinas	.	6
36. Projectos de metallurgia	.	2
Exercicios de docimasia	.	2
Missões.		
	14	10
	24	

III — CURSO DE ENGENHEIROS CIVIS INDUSTRIAES

1.º ANNO

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO

	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

3.º ANNO	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	2	.
14. Chimica organica e biologica	4	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo.	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicio de geometria descriptiva I	.	2
Chimica prática	.	2
	16	10
	26	

4.º ANNO	Lições	Exercicios
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
20. Zoologia geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

5.º ANNO	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
22. Resistencia dos materiaes e estabilidade das construcções	6	.
24. Hydraulica e machinas I ou II	6	.
13. Chimica inorganica industrial	2	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 6.º)	2	.
28. Projectos relativos a machinas e a chimica industrial	.	6
Missões.		
	18	6
	24	

6.º ANNO	Lições	Exercicios
26. Hydraulica e machinas II ou I	6	.
16. Chimica organica industrial.	2	.
11. Physica industrial.	2	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
40. Economia e legislação de obras publicas, de minas e industrial	2	.
42. Contabilidade industrial (n'este anno ou no 5.º)	2	.
29. Projectos de machinas e de physica e chimica industrial	.	6
Missões.		
	16	6
	22	

IV — CURSO DE COMMERCIO

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
1.º ANNO		
10. Physica geral.	6	.
12. Chimica inorganica geral.	6	.
Physica prática, especialmente trabalho com o microscopio.	.	2
Chimica prática	.	2
	12	4
	16	
2.º ANNO		
43. Commercio I ou II	6	.
19. Botanica industrial. Materias primas de origem vegetal	2	.
15. Chimica analytica.	2	.
Chimica prática	.	2
	10	2
	12	
3.º ANNO		
41 e 42. Commercio II ou I.	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico, direito administrativo e commercial	4	.
21. Zoologia industrial. Materias primas de origem animal	2	.
47. Analyse chimica commercial.	.	2
	12	2
	14	

V—CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DO EXERCITO

a. Para officiaes de estado maior e de engenheria militar; e para engenheria civil.

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
1.º ANNO		
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	
2.º ANNO		
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I	.	2
	16	8
	24	

4.º ANNO

	Lições	Exercicios
8. Astronomia e geodesia	6	.
6. Geometria descriptiva II	2	.
17. Mineralogia; paleontologia e geologia	6	.
18. Botanica geral	6	.
7. Exercicios de geometria descriptiva II	.	2
Mineralogia prática	.	2
Excursões geologicas.		
	20	4
	24	

b. Para officiaes de artilheria.

1.º ANNO

	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO

	Numero de horas semanaes — Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
10. Physica geral	6	.
15. Chimica analytica	2	.
45. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
Chimica prática	.	2
	14	12
	26	

3.º ANNO

	Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
39. Economia politica. Estatistica. Principios de direito publico e direito administrativo	4	.
46. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva	.	2
	16	8
	24	

VI — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA NAVAL

a. Para officiaes de marinha.

	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
10. Physica geral	6	.
Exercicios de mathematica	.	2
Physica prática	.	2
	12	4
	16	

b. Para engenheiros constructores navaes.

1.º ANNO

	Lições	Exercicios
1. Geometria analytica; algebra superior; trigonometria espherica	6	.
12. Chimica inorganica geral	6	.
44. Desenho	.	6
Exercicios de mathematica	.	2
Chimica prática	.	2
	12	10
	22	

2.º ANNO

	Lições	Exercicios
2. Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações	6	.
4. Geometria descriptiva I	6	.
10. Physica geral	6	.
45. Desenho	.	6
5. Exercicios de geometria descriptiva I . .	.	2
Physica prática	.	2
	18	10
	28	

3.º ANNO

	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
3. Mecanica racional; cinematica	6	.
18. Botanica geral	6	.
46. Desenho	.	6
	12	6
	18	

VII — CURSO PREPARATORIO PARA AS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes: Lições	Exercicios
10. Physica geral. Physica prática	6	2
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
20. Zoologia geral	6	.
18. Botanica geral	6	.
	30	6
	36	

VIII — CURSO PREPARATORIO PARA A ESCOLA DE PHARMACIA NAS ESCOLAS MEDICO-CIRURGICAS

	Numero de horas semanaes	
	Lições	Exercicios
12. Chimica inorganica geral. Chimica prática.	6	2
14 e 15. Chimica organica, biologica e analytica. Chimica prática	6	2
18. Botanica geral	6	.
	18	4
	22	

O numero de horas de exercicios, projectos e trabalhos praticos é, no começo de cada anno, fixado pelo conselho academico.

Condições d'admissão dos alumnos

As condições de admissão dos alumnos no corrente anno lectivo constam do edital da Directoria com data de 30 de julho. N'elle se diz:

«Os estudantes que pretenderem matricular-se devem lançar na caixa que está no corredor de entrada da secretaria, até ao dia 5 de outubro proximo futuro, os seus requerimentos datados, assignados e competentemente documentados, declarando-se n'elles a *naturalidade, freguezia e concelho, filiação paterna, idade e os cursos que desejam seguir.*

«Os alumnos que pretenderem, no proximo anno lectivo de 1886-1887, ser admittidos á primeira matricula nos cursos especiaes e no preparatorio para a Escola do Exercito, devem apresentar certidões de approvação nas seguintes disciplinas, ou nas equivalentes, segundo a legislação anterior (decreto de 14 de outubro de 1880):

1.ª Lingua portugueza (1.ª e 2.ª partes).

2.ª Lingua franceza (1.ª e 2.ª partes).

3.ª Arithmetica, geometria plana, principios de algebra e escripturação (1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes).

4.ª Algebra, geometria no espaço e trigonometria (1.ª e 2.ª partes).

5.ª Elementos de physica, chimica e introducção á historia natural (1.ª e 2.ª partes).

6.ª Desenho (1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª partes).

7.ª Litteratura nacional (1.ª e 2.ª partes).

8.ª Lingua latina (1.ª e 2.ª partes).

9.ª Philosophia racional, e moral, e principios de direito natural (1.ª parte).

10.ª Geographia e cosmographia, historia universal e patria (1.ª e 2.ª partes).

11.ª Elementos de legislação civil, de direito publico e administrativo portuguez e de economia politica.

Os alumnos que, segundo a legislação vigente, pretendam matricular-se como voluntarios, são admittidos á matricula apresentando certidões nas sete primeiras disciplinas acima mencionadas. Aos alumnos do curso preparatorio para a escola de pharmacia nas Escolas Medico-Cirurgicas são exigidas as certidões de approvação nas disciplinas dos n.os 1, 2, 3, 5, 7, 8 e 9.

Os alumnos militares, que pretendam frequentar os cursos preparatorios para a Escola do Exercito, precisam requerer ao Ministerio da Guerra a respectiva licença.

Dias e horas das aulas e dos exercicios

1.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 3.as; das 2 ás 4 horas.

2.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.

3.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.

4.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 9 ás 11 horas.
—exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.

5.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 5.as; das 12 ás 2 horas.

6.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; 1.ª turma, das 12 ás 2 horas. 2.ª turma, das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.

7.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 1.ª turma, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas. Aula, 2.ª turma, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 4.as; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 2.as; das 10 ás 12 horas.

8.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 1.ª turma, 2.as, 4.as e 6.as; das 8 ás 10 horas. Aula, 2.ª turma, 3.as, 5.as e sabbados; das 8 ás 10 horas.
—2.ª parte—aula, 3.as; das 8 ás 10 horas.
—3.ª parte—aula, 5.as; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 4.as; das 10 ás 12 horas.

9.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 6.as; das 10 ás 12 horas.

10.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.

—2.ª parte—aula, 6.as; das 10 ás 12 horas.
11.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—2.ª parte—aula, 5.as; das 12 ás 2 horas.
12.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
13.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
14.ª Cadeira—aula, 2.as, 4.as, e 6.as; das 2 ás 4 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as, e 6.as; das 10 ás 12 horas.
15.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 10 ás 12 horas.
—exercicios, 2.as, 4.as e 6.as; das 2 ás 4 horas.
16.ª Cadeira—1.ª parte—aula, 4.as e 6.as; das 12 ás 2 horas.
—2.ª parte—aula, 2.as; das 12 ás 2 horas.
17.ª Cadeira—aula, 3.as, 5.as e sabbados; das 9 ás 11 horas.
18.ª Cadeira—aula, 1.ª turma, 3.as, 5.as e sabbados; das 10 ás 12.—2.ª turma, 2.as, 4.as e 6.as; das 10 ás 12 horas.

IV

Livros que servem de texto e aconselhados para consulta nas diversas cadeiras, no anno lectivo de 1886-1887

1.ª Cadeira—*Gomes Teixeira (F.)*: Introducção á theoria das funcções.

2.ª Cadeira—*Gilbert (Ph.)*: Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire. 2.e édition. 1 vol. 8.º Paris et Louvain, 1878.

3.ª Cadeira—*Laurent (H.)*: Traité de mécanique rationelle, á l'usage des candidats á l'Aggrégation et á la Licence, 2.me edition. 2 vol. in-8.º Paris, 1877-1878.

4.ª Cadeira—*La Gournerie (Jules de)*: Traité de géometrie descriptive. 2.me edition, in-4.º, en trois parties: 1.re partie, texte de XIX-143 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1880.—2.me partie, texte de XIX-222 p. et atlas de 52 planches. Paris, 1885. 3.me partie, texte de XX-230 p. et atlas de 46 planches. Paris, 1885.

5.ª Cadeira—*Faye (H.)*: Cours d'astronomie de l'École Polytechnique. 2 vol. in-8.º Paris, 1881-1883. I. partie: Astronomie sphérique. Description des instruments. Théorie des erreurs. Géodésie et géographie mathématique, 1881. 1 vol. in 8.º de VIII-374 p.—II. partie: Astronomie solaire. Théorie de la lune. Navigation. 1883.

Habets: Topographie.

Calheiros:—Apontamentos de geodesia.

6.ª Cadeira—*Jamin (J.)*: Petit traité de physique á l'usage des établissements d'instruction, des aspirants au baccalauréats et des candidats aux écoles du gouvernement. Nouveau tirage, augmenté des *Notes sur les progrès récents de la physique*, par M. E. Bouty. 1 vol. in-8.º Paris, 1882.

Ganot (A.): Traité élémentaire de physique. 19.e edition, entièrement refondue, par George Maneuvrier. 1 vol. in-8.º de 1160 p. contenant 1014 gravures intercalées dans le texte et deux planches en couleur. Paris, 1884.

7.ª e 8.ª Cadeiras—Agenda du chimiste á l'usage des ingénieurs, physiciens, chimistes, etc. Paris, librairie Hachette, ultima edição.

Barthelot (M.): Traité élémentaire de chimie inorganique, 2.me edition, avec la collaboration de Jungfleisch. 2 vol. in-8.º de XX-483 pag. e XV-489 pag. Paris, 1880.

Lapa (J. I. Ferreira): Technologia rural ou artes chimicas agricolo-florestaes. 1.ª parte: Productos fermentados. 3.ª edição. 1 vol. in-8.º de 734 p. Lisboa, 1885. 2.ª parte: Azeites lacticinios, cereaes, farinhas, pão e féculas. 2.ª edição. 1 vol. in-8.º de 221 pag. Lisboa, 1875. 3.ª parte: Productos saccharinos, florestaes, textis, animaes e salinos. 1 vol. in-8.º Lisboa.

Payen (A.): Précis de chimie industrielle, á l'usage: 1.º des écoles d'arts et manufactures et des arts et métiers; 2.º des écoles préparatoires aux professions industrielles; 3.º des fabricants et des agriculteurs; 6.^me^ édition, revue et mise au courant des dernières décourvertes scientifiques, par Camille Vincent. 2 tom. in-8.º de 832 e 1:014 pag. et 1 atlas de XLIV planches. Paris, 1877-1878.

Silva (A. J. Ferreira da): Tratado de chimica elementar. I. Chimica mineral. 1 vol. in-8.º de XV-580 p. Porto, 1883.

Debray: Cours élémentaire de chimie. 2 vol.

9.ª Cadeira—*Lapparent (A. de):* Cours de minéralogie. 1 vol in-8.º de XII-560 pag. avec 519 gravures dans le texte et une planche chromo-lithographiée. Paris, 1884.

Gonçalves Guimarães (Dr. A. J.): Tratado elementar de mineralogia. Principios geraes. Porto, 1883. 1 vol. in-8.º de 239 pag. e 1 atlas de XXII est.

10.ª Cadeira—*Cauvet (D.):* Cours élémentaire de botanique. I. Anatomie et physiologie végétales; paléontologie végétale, géographie botanique. 1 vol. in-8.º de VIII-316 pag. avec 404 figures. Paris, 1885.

Le Maout (E.) et *Decaisne (J.):* Flore des jardins et des champs.

Brotero (F. A.): Flora lusitanica.

11.ª Cadeira—*Lanessan (J. L. de)*: Manuel de histoire naturelle médicale.

12.ª Cadeira—*Flamant:* Stabilité des constructions et résistance des matériaux. 1886. (Baudry).

13.ª Cadeira—*Collignon:* Cours de mécanique, appliquée aux constructions. 2.me partie. Hydraulique.

14.ª Cadeira—*Durand-Claye* (*Ch. L.*) et *L. Marx:* Routes et chemins vicinaux.

Debauve: Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées.

15.ª Cadeira—*Balling:* Manuel pratique de l'art de l'essayeur.

Callon (*J.*)*:* Cours de exploitation des mines.

Gruner: Traité de métallurgie.

Haton de la Goupillière: Cours de exploitation des mines.

16.ª Cadeira—*Rodrigues de Freitas* (*J. J.*)*:* Principios de economia politica.

Codigo administrativo.

Codigo Commercial Portuguez.

17.ª Cadeira—*Léfévre:* La comptabilité.

Pereire: Tables de l'intérêt composé des annuités et des rents viagères.

Estabelecimentos da Academia

I. — Bibliotheca

1. Sobre a historia e desenvolvimento d'este estabelecimento veja-se:

Memoria historica da Academia Polytechnica do Porto, pelo conselheiro Adriano d'Abreu Cardoso Machado, no *Annuario* de 1877-1878, pag. 206, 208-210, 225 e 226.

Catalogo da Bibliotheca da Academia Polytechnica do Porto; 1.ª parte. Catalogo dos livros de Mathematica e de

Philosophia natural. Porto, 1883; *Annuario* de 1878-1879, pag. 29-37; *Annuario* de 1879-1880, pag. 33 a 41; *Annuario* de 1880-1881, pag. 45-54; *Annuario* de 1881-1882, pag. 55-82; *Annuario* de 1882-1883, pag. 167-195; *Annuario* de 1883-1884, pag. 100-116; *Annuario* de 1884-1885, pag. 48-57.

2. Obras offerecidas á Bibliotheca

Actas e Pareceres do Congresso da Instrucção do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 vol.

Albuquerque (Dr. P. A. da Matta): Philosophia do direito publico. Rio de Janeiro. 1 vol.

Albuquerque (F): Revista de Horticultura, vol. I. Rio de Janeiro. 1 vol.

Almeida (A. E. Ribeiro d'): Lições lythographadas para a Escóla do exercito. Força da polvora e Balistica interna. 1 vol. Lisboa.

— Material d'artilheria. 1 vol.

Annuario della R. Università degli Studi di Torino por l'anno accademico 1885-86. 1 vol.

Annuario estatistico de Portugal. Lisboa, 1886. 1 vol.

Arroyo (Dr. M. Raymundo): Discurso lido en solemne inauguracion del curso academico de 1886 á 1887 en la Universidad de Salamanca. Salamanca, 1886. 1 vol.

Arthur Indio do Brazil: Memoria descriptiva do electro marégrapho. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Atheneu Polytechnico: Revista polytechnica, n.º 1 a 3, vol. 2.º, 1884. Rio de Janeiro. 3 fasc.

Azambuja (Conselheiro d'): Doutrinas pedagogicas. Rio do Janeiro. 1 fasc.

Bachelin (L.): Interprétation littéraire et philologique de la prémière idylle de Théocrite. (Académie de Neuchatel. Année 1886-1887). 1 vol.

Bandeira, filho (Dr. A. H. de Sousa): Relatorio sobre a instrucção publica. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Barcellos (N. V. C.): Obras de desobstrucção do Rio Jaguarão. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Bede (E.) et Hospitalier: A telephonia. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Bicalho (Honorio): A estrada de ferro de Cantagallo, ramal do rio Bonito. Rio de Janeiro. 1 fasc.

— Estudos sobre a largura das estradas de ferro e resistencia dos trens. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Bicker (J. F. J.): Collecção de tratados e concertos de pazes que o estado da India Portugueza fez com os Reis e Senhores com quem teve relações nas partes da Asia e Africa Oriental, desde o principio da conquista até ao fim do seculo XVIII, tomo VI, IX, XII, XIII e XVIII. Lisboa. 5 v.

Bocayuva (R.): A crise da lavoura. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Boletim da Sociedade de Geographia Commercial do Porto, 1886, n.os 1 e 2. Porto, 1886. 2 fasciculos.

Boletim da Sociedade de Geographia de Lisboa, 5.ª serie. Lisboa, 1885. 1 volume.

Brandão (F. de C. S.): Relatorio do Ministerio dos Negocios Estrangeiros. Rio de Janeiro. 1 vol.

Breve noticia sobre a collecção das madeiras do Brazil. Exposição internacional de 1867. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Bueno (F. A. P.): Memoria justificativa dos planos apresentados ao Governo Imperial para o prolongamento da estrada de ferro de S. Paulo. Rio de Janeiro. 1 vol.

— Memoria sobre a provincia de Matto Grosso. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Burnier (M. N. N.): Estrada de ferro de D. Pedro II. Rio de Janeiro. 1 volume.

Cabo Submarino na provincia do Maranhão. Rio de Janeiro. 1 f.

Cabral (J. A. C. das Neves): Estatistica mineira (anno de 1882). Lisboa, 1886. 1 vol.

Calvo (Carlos): La República del Paraguay. Rio de Janeiro. 1 vol.

Calaça (Francisco José Gomes): Estrada de ferro de Cuyabá á Lagoinha. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Camara (J. Ewbank da): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Camara (J. Ewbank): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Camara (J. E. da): Caminhos de ferro do Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 1 vol.

Camara (J. H. da): Caminhos de ferro de S. Paulo. Rio de Janeiro. 1 volume.

Caminhoá (Dr. J. Monteiro): Relatorio sobre os jardins botanicos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Carvalho (Augusto de): O Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Catalogo da Exposição de Obras Publicas do ministerio da agricultura. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Catalogo dos pergaminhos do cartorio da Universidade de Coimbra. Coimbra. 1 fasc.

Catalogue of Dartmouth College and the Associated Institutions, for the year 1885-86. Hanover, 1885. 1 vol.

Choffat (Paul): Section des travaux géologiques du Portugal. Description de la Faune Jurassique du Portugal. Mollusques Lamellibranches. Deuxième ordre. Asiphonidae. Première livraison. Pages 1 à 36. Planches 1 a 10. Lisboa, 1885. 1 fasc.

Conferencias effectuadas na Exposição pedagogica. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Congresso Agricola do Recife em 1878. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Cornell (The) University register, 1885 86. 1 vol.

Coutinho (J. M. da Silva): Estrada de ferro do Recife a S. Francisco Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Couty (Louis): Le Brésil en 1884. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Couty (Louis): L'esclavage au Brésil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

— Propaganda na Europa do mate, do café e da carne secca. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Dedications of Rollins Chapel and Wilson Hall (Dartmouth college). June 24, 1885. 1 vol.

Delgado (J. F. N.): Estudo sobre os bilobites e outros fosseis dos quartzistes da base do systema silurico de Portugal. Lisboa, 1886. 1 vol.

Discorso inaugurale e annuario accademico (Regia Universitá degly studi di Modena). 1885-86. 1 vol.

Documentos para a historia das Côrtes Geraes da Nação Portugueza, coordenação auctorisada pela Camara dos Senhores Deputados. Tomo III—anno de 1827. Lisboa. 1 vol.

Doucet: Rapport annuel lu en séance publique le octobre 1886. (Université Libre de Bruxelles. Année académique 1886-1887) Bruxelles, 1886. 1 volume.

Durão (H. C.): Memoria justificativa sobre os estudos definitivos para a estrada de ferro do Rio Grande ao entroncamento no Cacequy. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Estudo pratico sobre vias de ferro portateis e fixas. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Estrada (A) **de ferro de D. Pedro II e o administrador do estado.** Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Exposição feita pelo presidente aos accionistas da Companhia Telephonica do Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ferreira (Felix): Lyceu d'artes e officios. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Folque (Filippe): Collecção de taboas para facilitar varios calculos astronomicos e geodesicos. Lisboa, 1865. 1 vol.

— Instrucções para o serviço geodesico de primeira ordem. Lisboa, 1870. 1 vol.

— Instrucções e regulamento para a execução e fiscalisação dos trabalhos geodesicos chorographicos e hydrographicos do Reino. Lisboa, 1874. 1 volume.

Fleury (A. A. de Padua): O presidio de Fernando de Noronha e as nossas prisões. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Freire (Dr. D. J.): Relatorio apresentado ao governo imperial pelo presidente da Junta Central de Hygiene Publica. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Freio automatico de ar comprimido Westinghouse. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Freitas (Dr. Antonio de Paula): Relatorio do Lazareto do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Guiguet (C. G.) Relatorio sobre chimica industrial, agricultura e silvicultura. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Hargreaves (H. E.): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Hippeau (M. C.): A instrucção publica nos Estados-Unidos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Hayez (Martinus): O imposto, considerado á luz dos principios economicos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Illuminação Publica. Alguns apontamentos sobre o serviço das Companhias do Gaz. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Inauguracion del curso academico de 1886 á 1887 en la Universidad de Zaragoza. Zaragoza, 1886. 1 vol.

Instituto (O), Revista Scientifica e litteraria. Coimbra, 1885 e 1886. 2 volumes.

Jordão (Elias F. Pacheco): Revista do Instituto Polytechnico. N.º 1—1876; n.º 2—1878. Rio de Janeiro. 2 fasc.

Jorge (R. d'Almeida): Relatorio apresentado ao Conselho Superior de Instrucção Publica na sessão de 1 d'outubro de 1885. Porto, 1885. 1 vol.

Leão (M. J. da Silva) e Moitinho (Domingos): Breve noticia sobre a provincia das Alagoas. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ligação do Observatorio Astronomico de Lisboa com a triangulação fundamental. Lisboa, 1886. 1 vol.

Limpo (Brito): Memoria sobre a determinação do comprimento do pendulo. Lisboa, 1865. 1 vol.

—Taboas para o calculo das refracções terrestres e resolução analytica d'um problema de topographia. Lisboa, 1865. 1 vol.

—Estudos sobre o nivelamento. Lisboa, 1870. 1 vol.

—Telemetro d'inversão. Lisboa, 1874. 1 vol.

—Instrucções para o exercicio dos nivelamentos geometricos de precisão. Lisboa, 1883. 1 vol.

Luque (Doctor D. Rafael Conde y): Discurso leido en la Universidad Central en la solemne inauguracion del curso academico de 1886 a 1887. Madrid, 1886. 1 vol.

Mathieu (M. Emile): Cours de physique mathematique. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Mattos (Antonio Gomes de): Esboço de um manual para os fazendeiros de assucar no Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Memoria estadistica del curso de 1884 a 1885 y Annuario de 1885-86. (Universidad Central). Madrid, 1886. 1 vol.

Memoria sobre o estado de la instruccion en la Universidad Litteraria de Salamanca y establecimientos de enseñanza de su districto correspondiente al curso académico de 1884 a 1885. Salamanca, 1885. 1 vol.

Mendoça (Salvador de): Trabalhos asiaticos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Moraes (E. J. de): Estradas de ferro da Provincia de S. Pedro do Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Moreira (Conselheiro Dr. N. J.): O auxiliador da industria nacional. Vol. LI, anno de 1883. N.º 1 a 10—Janeiro-Outubro de 1881. N.º 12—Dezembro, 1881. Rio de Janeiro. 11 fasc.

Moreira (Dr. Nicolau Joaquim): Relatorio sobre a emigração nos Estados-Unidos da America, 1876. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Moreira (Dr. Nicolau Joaquim): Revista agricola do Imperial Instituto Fluminense de agricultura, 1880-1884. Rio de Janeiro. 17 fasc.

Mourloy (Charles): Noticia sobre o systema de telegraphia e telephonia simultaneas. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ministerio do Reino (Contas da gerencia do) do anno economico de 1884-1885 e do exercicio de 1883-1884. Lisboa, 1886. 1 vol.

Nuitter (Charles): Le nouvel opera. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

*

Obras (As) da nova praça do Commercio do Rio. Rio de Janeiro. 1 fasciculo.

Observações metereologicas feitas no observatorio metereologico e magnetico da Universidade de Coimbra no anno de 1885. Coimbra, 1886. 1 vol.

Oliveira (A. de Almeida): Relatorio apresentado á assembleia geral legislativa na 4.ª sessão da 18.ª legislatura pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da marinha. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Oliveira (Luiz Augusto de): Caminhos de ferro nacionaes. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Ottoni (Conselheiro Ch. B.), Almeida e Penna: Memoria justificativa dos planos apresentados ao governo imperial para a construcção da estrada de ferro de Porto Alegre á Uruguyana. Rio de Janeiro. 1 vol. enc.

Paraizo (C.ro F. P. de Souza): Relatorio apresentado á assembleia geral legislativa na 4.ª sessão da 18.ª legislatura, pelo ministro e secretario d'estado dos negocios da justiça. Rio de Janeiro. 1 vol.

Pays (Le) du Café: Voyage de M. Durand au Brézil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Penna (A. A. M.): Relatorio do Ministerio dos Negocios da Agricultura, Commercio e obras publicas. Rio de Janeiro 1 vol.

Pereira (L. R.): Relatorio do Ministerio da fazenda. Rio de Janeiro. 1 vol.

Picanço (Francisco): Ensaio de um vocabulario de estrada de ferro e de rodagem. Rio de Janeiro. 1 fasc.

—Viação ferrea do Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Pinto (José Augusto Nascentes): Demonstração da taboa das joias. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Pizarro (Dr. João Joaquim): Memoria historica dos factos mais notaveis occorridos na faculdade de medicina do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Primeira exposição pedagogica do Rio de Janeiro.—Documentos. Rio de Janeiro. 1 vol.

Proença (João Justino de): O melhor porto ao sul do Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Programma do ensino do Imperial Collegio de D. Pedro II. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Projecto de melhoramento da barra e construcção de um porto no Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Queiroz (Aristides Galvão de): Observações sobre alguns erros da moderna escola da «barateza kilometrica» nas estradas de ferro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Rebouças (André e José): Ensaio do indice geral das madeiras do Brazil.—1.º fasc. (A B C). 1877.—2.º fasc. (D a L). 1878.—3.º fasc. (L a Y). 1878. Rio de Janeiro. 3 v. enc.

Reis (Malvino da Silva): Situação economica do Brazil. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Relatorio dos actos da Direcção da Associação Commercial do Porto no anno de 1885. Porto, 1886. 1 vol.

—do Director do Jardim Botanico. Rio de Janeiro. 1 fasc.

—do Lyceu d'Artes e Officios. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Relatorio sobre o melhoramento da barra do Rio Grande do Sul. Rio de Janeiro. 3 vol.

Relatorios da direcção da Sociedade Martins Sarmento, 1885 e 1886. Porto. 2 fasc.

Revista do Instituto Polytechnico Brazileiro e das obras publicas do Brazil. Rio de Janeiro. 1 vol.

Revista de Guimarães. Publicação da Sociedade Martins Sarmento. 1885-1886. Porto. 2 vol.

Revista da Secção da Sociedade de Geographia de Lisboa no Brazil. 2.ª serie. N.º 1, 2 e 3. Rio de Janeiro, 1885-1886. 3 fasc.

Revista Scientifica publicada pela sociedade Athneo do Porto. N.º 1 a 4. Porto, 1885. 4 fasc.

Ribeiro (João): Estudos philologicos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Sabonadière (Guilherme): O fazendeiro de café em Ceylão. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Saldanha da Gama (Dr. José de): Relatorio sobre a exposição Universal de Philadelphia em 1876. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Santos (Dr. Thomaz Delfino dos): Discurso na faculdade de medicina do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Senna (Dr. Antonio Joaquim de): Systema de telephonia e telegraphia Van Rysselberghe, privilegiado pelo governo imperial. Rio de Janeiro. 1 f.

Senado (O): e a reforma constitucional. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Silva (F. J. Betencourt da): Vulgaridades de arte. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Siqueira (Dr. José de Goes e): Breve guia para o tratamento das molestias pelo methodo dosimetrico. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Souto (Vieira): Revista do Instituto Polytechnico Brazileiro. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Souza (José Alvares de Araujo e): Provincia de Minas Geraes. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Souza (Paulino José Soares de): Administração local. Projecto apresentado á camara dos snrs. deputados. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Vecchio (Bacharel Adolpho José Del): Madeiras e granitos. Rio de Janeiro. 1 fasc.

Trabalhos da Commissão scientifica de exploração. Rio de Janeiro. 1 fasc.

---

3. Livros adquiridos por compra

Agenda du Chimiste. 1886. 1 vol.

Allard (A.): Discours sur la crise agricole et manufacturière. Bruxelles, 1886. 1 vol.

Andrè Daniel: L'année politique, 1884. Paris, 1885. 1 vol.

—L'année politique, 1885. Paris, 1886. 1 vol.

Annales de Physique et de Chimique. Paris, 1885-1886. 6 vol.

Annales des ponts et chaussées. Paris, 1885-1886. 2 vol.

Annales scientifiques de l'Ecole Normale superieure. Paris, 1886. 1 vol.

Aranha (Brito): Dicccionario Bibliographico portuguez, tomo X. Lisboa, 1883. 1 vol.

Armengaud (Ainé): Le vignole des mécaniciens. Essai sur la construction des machines. Paris, 1875. 1 vol. e atlas.

—Traité théorique et pratique des moteurs hydrauliques. Paris, 1858. 1 vol. in-4.º e atlas.

—Les scieries mécaniques et les machines-outils à travailler les bois. Paris, 1881. 1 vol. e atlas.

Atlas général composé de trent sept carts coloriées et gravées sur cuivre. Paris, 1885. 1 vol.

Augier (C. M.): Traité complet théorique et appliquée de comptabilité commerciale et industrielle. Paris, 1886. 1 vol.

Bailon (M. H.): Dictionnaire de Botanique. Paris. 1 fasc. 16 a 21.

Balling. Manuel pratique de l'art de l'essayeur. Paris, 1881. 1 vol. in-8.º

Bauschinger (J.): Elemente der graphischen Statik. Munchen, 1880. 1 vol. e atlas.

Bayle (E.): Cours de minéralogie et de géologie. Paris, 1869, (lith). fasc. 1 e 2.

Belanger (J. B.): Essai sur la solution mécanique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes. Paris, 1828. 1 vol.

Benevides (F. da Fonseca): Relatorio sobre a exposição universal de Paris em 1867. Instrumentos de physica e machinas de vapor. Lisboa, 1867.

Bertrand (P.): Systeme de navegation fluviêle. Paris, 1801. 1 vol.

Block (Maurice): Annuaire de l'économie politique et de statistique. Paris, 1885.

—Annuaire de l'économie politique et de la statistique. 1886. Paris, 1886. 1 vol. 12.º

Bluntschli (M.): Le droit international codifié. Paris, 1881. 1 vol.

Boileau (P.): Notions nouvelles d'hydraulique. 1881. 1 vol.

Bonnami (H.): Manuel de l'operateur ou tachéometre. Paris, 1883. 1 vol.

Bonniceau. Etudes et notions sur les constructions à la mer. Paris. 1 vol. e atlas.

Boussinesq (J.): Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris, 1877. 1 vol.

Bresse. Cours de mécanique et machine. Paris, 1885. 2 vol.

Bresse (Ch.) et ch. Rivière: Nouveau cours de physique. 2.me edition. Paris, 1886. 2 fasc.

Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques. Paris, 1875. 1 volume.

Brun (F.): Traité pratique des operations sur le terrain. Paris, 1884. 1 volume.

Buchetti (J.): Les machines à vapeur actuelles. Paris. 1 vol. e atlas.

Buffon (N. de): Les canaux d'irrigations de l'Italie Septentrional. Paris, 1861. 3 vol.

Bulletin de la Société Chimique de Paris. Paris, 1885 e 1886. 2 vol.

Bulletin des sciences mathématiques. Paris, 1885-1886. 2 vol.

Burmester (Dr. L.): Lehrbuch der Kinematik. Leipzig, 1886. 2 fasc. e atlas.

Cacheux (E.): L'économiste pratique, texte e atlas. Paris, 1885. 2 v.

Carnoy (Joseph): Cours de géometrie analytique. Paris, 1882 a 1886. 2 vol.

Cauchy (Augustin): Oeuvres complétes. 1.ª serie, tomo V. Paris. 1 v

Cauvet (D.): Cours élémentaire de botanique, tomo 2.º Paris, 1885.

Cavallero (Agostino): Le Macchine a vapore il materiale e l'esercizio technico delle strade ferrate. Torino, 1882. 1 vol. e atlas.

Chalon (P. F.): Les explosifs modernes. Paris, 1886. 1 vol. in-8.º

Chateau (Th.): Technologie des batiments. Paris, 1882.

Claudel (G.): Étude sur le rivetage. Paris, 1882. 1 vol.

Cohen (D. X.): Bases para orçamentos. Lisboa, 1881. 1 vol.

Coligny (Le M. Anatole de): Recherches théoriques et expérimentales sur les oscillations de l'eau et les machines hydrauliques à colonnes liquides oscillantes avec huit planches. Paris, 1883. 2 vol.

Collignon (E.): Cours de mécanique appliquée aux constructions. 1.re partie. Résistance des matériaux. 3.me edition. Paris, 1885.

Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris, 1885-1886. 4 vol.

Cornil (A. V.) et V. Babes: Les Bactéries et leur role dans l'anatomie et l'histoire pathologique. Paris, 1886. 1 vol.

Coste (H. et L. Maniquet: Traité théorique et pratique des machines à vapeur du point de vue de la distribution). Paris, 1886. 1 vol. e atlas.

Courtin (J.): Eléments de la théorie mécanique de la chaleur. Mons, 1882. 1 vol.

Courtois (A. H.): Étude sur les machines centrifuges, pompes et ventilateurs. Paris, 1881. 1 vol.

Cremona (L.): Les figures réciproques en statique graphique. Paris, 1885. 1 vol. e atlas.

Cresy (Edward): Encyclopedia of civil engineering. London, 1880. 1 volume.

Debauve (A.): Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées. 9.me fascicule, texte. Routes, 1 atlas. Paris, 1873.

—Procédés et matériaux de constructions. Paris, 1885, texte e atlas, 4 vol.

Debray (H.) et Joly: Cours de chimie. Paris 1876 e 1883 tomo 1.º e 2.º 2 vol.

Demombynes (G.): Les constitutions européennes. Parlements conseils provinciaux et communnaux et organisation judiciaire. Paris, 1883. 2 vol.

Desnoyers (M. Ph. Croizette) Cours de constrution des ponts. Paris, 1885. 2 vol. in-4.º e atlas.

Despeyrous. Cours de mécanique. Paris, 1884. 2 vol.

Diccionario Universal portuguez illustrado, vol. I e VI. Lisboa.

Dictionaire des finances, publiée sur la direction de M. Léon Say. Paris, 1883-1884. 4 fasc.

Dunker (J.): Atlas manuel de botanique. Paris. 1 vol.

Dini (U.): Fondamenti per la teorica delli funzioni di variabili reali. Pisa, 1878. 1 vol.

Dubosque: Murs de soutènement. Paris. 1 vol.

Dubuisson (J.): Études définitives d'une voie ferrée entre deux points données. Paris, 1882-83. 3 fasc.

Dumoncel (Le comte Th.) et Geraldy: L'electricité comme force motrice. Paris, 1884. 1 vol.

Dupuit (J.): Études thèoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux découverts et à travers les terrains perméables. Paris, 1863. 1 vol.

—Traité théorique et pratique de la conduits et de la distribution des eaux. Paris, 1865. 1 vol. e atlas.

Durand-Claye (C. Léon): Chimie appliquée à l'art de l'ingéniéur. Paris, 1885. 1 vol.

—et Leopold Marx. Routes et chemins vicinaux (Encyclopedie des travaux publics). Paris, 1885. 1 vol., 8.º

Émy (A. R.): Traité de l'art de la charpenterie. Paris. 4 vol.

Faye (H.): Sur l'origini du monde. Paris, 1885. 1 vol.

Fernique (A.): Album d'eléments et organes des machines. Paris, 1882. 1 vol.

Ferreira (C. A. P.): Guia de mecanica pratica. Lisboa, 1822.

—Guia do fogueiro conductor de machinas de vapor. Lisboa, 1883.

Fiedler (Dr. W.): Dei daretellende Geometrie in organischer Verbindemy mit der Geometrie des Lage. Leipzig, 1883 e 1885. 2 vol.

Figuier (L.): L'année scientifique et industrielle. 28ème et 29ème année. Paris. 2 vol.

Fino (G. C. da G. C.). Legislação e disposições regulamentares sobre empreitadas. Lisboa, 1879. 1 vol.

—Sobre caminhos de ferro. Lisboa, 1883. 1 vol.

—Ácerca do serviço d'obras publicas. Lisboa, 1881. 1 vol.

—Legislação e disposições regulamentares sobre expropriações. Lisboa, 1877. 1 vol.

—Sobre o serviço de pesos e medidas. Lisboa, 1881. 1 vol.

Flamant (A.): Stabilité des constructions, Résistance des materiaux. Paris, 1886. 1 vol. in-8.º

Foyot (L.) et A. Lanjalley: Dictionnaire des finances, publié sous la direction de Léon Say. Paris, 1884. 4 fasc.

Fréminville: Cours de machines à vapeur. Paris, 1880-1881. 1 vol. e atlas.

Frémy (M.): Encyclopedie chimique. Paris, 1885 e 1886. 10 vol.

Ganot (A.): Traité élémentaire de physique. Paris, 1884.

Gaumet (F.): Traité de topographie. Paris, 1 vol.

Gayffier (J. de): Nouveau manuel complet des ponts et chaussées. Paris, 1868. 1 vol. 18.º

—Nouveau manuel complet des ponts et chaussés—Ponts et Aqueducs en maçonnerie. Paris, 1881. 1 vol. 16.º

Gomes (B. B.): Cartas elementares de Portugal. Lisboa, 1878.

Goupillière (Haton de la): Cours d'exploitation des mines. Paris, 1884. 2 vol. e atlas.

Graëff (M. A.): Traité d'hydraulique, précédé d'une introduction sur les principes généraux de la mécanique. Paris, 1882-1883. 3 vol.

Gruner (L.) Traité de métallurgie. 2 vol. e atl.

Guillemin: Navigation intérieure. Rivières et canaux (Encyclopedi) des travaux publics). Paris, 1885. 2 vol.

Habets (A.): Cours de topographie. Paris, 1884. 1 vol.

Hallauer (O.): Moteurs à vapeur. Étude critique sur les essais de moteurs à vapeur. Paris, 1881. 1 vol.

Hergot (F. et): Traité de mécanique théorique et appliquée 1.^{me} et 2.^{e} parties. Paris, 1885. 2 vol.

Herrmann (G.): Statique graphique des mécanismes. Paris, 1882. 1 volume.

Heumann (Capitaine): Les Russes et les Anglais dans l'Asie Centrale. Paris, 1885. 1 vol.

Hydraulique fluviale (Encyclopedie des travaux publics). Paris, 1884. 1 vol.

Ibanez (D. Carlos Ibanez e): Description geodesica de las Ilhas Baleares. Madrid, 1871. 1 vol.

—Estudos sobre nivelacion geodesica. Madrid, 1884. 1 folh.

—Experiencias hechas con el aparato de medir bases pertenciente a la comision des mapas de España. Madrid, 1859. 1 vol.

—D. Freitas Saavedra Menezes, D. Fernando Monet e D. Cesáreo Queiroga: Base central de la triangulation géodesique d'Espagne. Traduit par A. Laussedat. Madrid, 1865. 1 vol. in-4.°

Jacobi: Gesammelte Werke. Vierter Band. Berlin, 1886. 1 vol.

Jacquet (A.): Barème du poids de métaux. Paris, 1879. 1 vol.

Jamin et Bouty: Cours de physique á l'usage de la classe de mathématiques spéciales. Paris, 1886. 2 vol. in-8.°

Jordan (M. Camille): Cours d'analyse de l'E'cole Polytechnique de Paris.—Tomo I. Calcul différentiel, 1882.—Tomo II. Calcul intégral. (Intégrales definies et indéfinies), 1883. Paris. 2 vol.

Jullien (C. E.): Traité theorique et pratique de la construction des machines à vapeur fixes, locomotives et marines. Paris. 1 vol. e atlas.

Kutter (W. R.): The new formula for meon velocity of dischange of rivers and canals. London, 1876. 1 vol.

La colonisation scientifique et les colonies françaises. Paris, 1884. 1 volume.

Laffineur (Jules): Hydraulique et hydrologie sauterraine et superficielle. Paris, 1882. 1 vol.

—Traité de la construction des romes hydrauliques. Paris. 1 vol.

—Guide pratique de l'ingénieur agricole. Paris. 1 vol.

Lagreve (H. de): Cours de navigation interieure. Paris, 1869. 2 vol.

Laissle (Fr.) et Ad. Schnebler: Calcul et constructions des ponts métalliques. Paris. 2 vol.

La Gournerie: Traité de géometrie descriptive. 1.^{er} partie. Paris, 1873. 1 vol.

Lanessan (J. L. de): Manuel d'histoire naturelle médicale. Paris. 3 volumes.

Lapa (J. I. Ferreira): Technologia rural ou artes chimicas, agricolas e florestaes. 2.^{a} e 3.^{a} edição. Lisboa, 1879 e 1885. 2 vol. in-8.°

Laurent: Traité de analyse. Tome I. Paris, 1885.

Lelontre (Georges): Les transmissions par courroies, cordes et cables métalliques. Paris, 1881. 1 vol.

Leroy-Beaulieu (P.): Le collectivisme. Paris, 1885. 1 vol.

Liagre (J. B. J.): Calcul des probabilités et théorie des erreurs. Bruxelles et Paris, 1879. 1 vol. in-8.º

Liais (Emm.): Traité d'astronomie appliquée à la géographie et a la navigation suivie de la géodesie pratique. Paris, 1869. 1 vol. 8.º

Linglin (E.): Traité elementaire de la résistance des materiaux. Paris, 1882. 1 vol.

Liouville (J.): Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris, 1836 a 1855. 20 vol.

—Journal de mathématiques pures et appliquées. 4.^me^ serie, tome 1.^er^ Année 1885. Paris. 1 vol.

Martins (J. P. d'Oliveira): A circulação fiduciaria. Lisboa, 1883.

Mascart (E.): Leçons sur l'éléctricité et le magnétisme. Paris, 1886. 1 vol.

Mastaing: Cours de mécanique appliquée a la resistance des materiaux. Paris, 1874. 1 vol.

Maurer (Maurice): Statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planches, pentres, ponts. Deuxième edition. Paris, 1886. 1 v. e atlas.

Menger (Dr. C.): Die Irrthümer des historismus in der Deutschen Nationalökonomie. Wien, 1884.

Moessard (P.): Topographie et géodesie. Cours de Saint-Cyr. 1 vol.

Moinot (J.): Levés de plans à la Stadia. Paris, 1877. 1 vol.

Morton (Fr.): Traité théorique et pratique des opérations commerciales et financières. Paris, 1879. 2 vol.

Moutier (J.): La thermo dynamique et ses principales applications. Paris, 1885.

Muller (E.): Cours de constructions civiles. Paris, 1882. 1 vol.

Muller-Breslau et F. Seyrig: Elements de Statique graphique appliquée aux constructions. Paris, 1886. 1 vol. e atlas.

Navièr: Resumé des leçons données á l'E'cole des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique. Paris 2 vol.

Nazzani (J.): Trattato di idraulica pratica. Milano, 1883. 1 vol.

Nouvelles annuales de la construction. Recueil mensuel fondé por C. A. Oppermann. Paris, 1886. 1 vol.

Novicour (J.): La politique internationale. Paris, 1886. 1 vol.

Oppermann (C. A.): 300 projects et propositions utiles. Paris, 1886. 1 vol.

Passy (G. de): E'tude sur le service hydraulique. Paris, 1876. 1 vol.

Pereire (E.): Tables de l'intérêt composé des annuités et des rentes viagères. Paris, 1882. 1 f. 4.º

Perriquet (E.): Traité théorique et pratique des travaux publics, tom 1.^er^ et 2.^e^ 1883. 2 vol.

Phillips (M.): Cours de hydraulique et d'hydrostatique professé à l'Eicole Centrale. Paris, 1875. 1 vol.

Plateau (J.): Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. Paris, 1873. 2 vol.

Pochet (M. Léon): Nouvelle mécanique industrielle. Paris, 1874. 1 v.

Poillon (L.): Traité théorique et pratique des pompes et machines a elever les eaux. Paris, 1885. 1 vol. e atlas.

Porn (J.): La tachéometrie ou l'art de lever des plans... Paris, 1858. 1 vol.

Portefeuille économique des machines de l'outillage et du matériel. Paris, 1886. 1 vol.

Putzeys (Dr. F.): L'Hygiéne dans la construction des habitations privées. Paris, 1885. 1 vol.

Rankine (W. J. Macquorn): Manual of civil engineering. London, 1885. 1 vol.

Regains scientifiques (lithog.) Paris, fasc. 1 a 6 e 8.

Reid (Henry): The science and art of the manufacture of Portland ciment. London, 1877. 1 vol.

— Pratical treatrise on natural and artificial concreti; its vanieties and constructive adoptations. London, 1879.

Résal (J.): Ponts métalliques (Encyclopédie des travaux publics). Paris, 1885. 1 vol. in-8.º

Revista d'Obras Publicas e minas. Annos XV e XVI. Lisboa, 1884 e 1885. 2 vol.

Revue Scientifique. Paris, 1885 e 1886. 4 vol.

Ritter (Dr. Phil.): Elementary theory and calculation of iron bridges and roots. London, 1879. 1 vol.

Rodbertus-Jagetzow (Dr. Carl.): Das Capital. Berlin, 1881.

Rodrigues (F. d'Assis): Diccionario technico e historico de pintura, esculptura, architectura e gravura. Lisboa, 1875. 1 vol.

Roscher (Wilhelm): Nationalókonomik des Handels und Gerverbfleiszes. Stuttgart, 1882.

Schaffle (Dr. A. F.): Die Aussichtslosogkeit der social demokratie. Tübingen, 1885.

Schmoller (G.): Neber einige Grundfragen des Rechets und der Volkswirthschaft. Leipzig, 1875.

Sergent (E.): Traité pratique et complet de tous les mesurages, métrages, jangeages de tous les corps. Paris, 1874. 2 vol. e atlas.

Sicard (H.): Eléments de zoologie avec 750 figures intercalées dans le texte. Paris, 1883. 1 vol.

Smiths: Les coulitions et les grèves. Paris, 1885. 1 vol.

Société française de physique. Collection de memoires relatifs à la physique, tom II. Paris, 1885.

Summer (W. G.): Le protectionisme. Paris, 1886. 1 vol.

Taffe (A.): Application de la mécanique aux machines. Paris, 1872. 1 vol.

Tannery (Jules): Introduction a la théorie des fonctions d'une variable. Paris, 1886. 1 vol.

Thompson (Silvanus): Traité théorique et pratique des machines dynamo électriques. Trad. de l'anglais par E. Boistel. Paris, 1886. 1 vol.

Thomson (J.): Thermochemische Untersuchungen. Leipzig, 1882. 4 vol. in-8.º

Turazza (Domenico): Tratatto di idraulica pratica. Padova, 1880. 1 v.

Uhland (W. H.): Les nouvelles machines à vapeur, notamment celles qui ont figuré à l'Exposition Universelle de 1878. Paris, 1879. 6 fasc. e atlas.

Unwin (M. W. Cauthorne): Éléments de construction de machines. Paris, 1882. 1 vol.

Valleroux (P. Hubert): Les corporations d'arts et métiers et les syndicats professionelles en France et à l'etranger. Paris, 1885. 1 vol.

Vambery (Arminius): La lutte future pour la possessions de l'Inde. Paris, 1885. 1 vol.

Vigreux: Theorie et pratique de l'art de l'ingénieur ou constructeur de machines ** Paris, 18 fasc. e atlas.

Wanderley (G.): Traité pratique de constructions civiles. Paris, 1881-85. 3 vol.

Witz (M. Aimé): E'tudes sur les moteurs à gaz tonnant. Paris, 1884. 1 vol.

Wolf (C.): Les hypotheses cosmogoniques. Paris, 1886. 1 vol.

Wurtz (A.): Dictionnaire de chimie pure et appliquée.—Supplement. Paris, 1886.

Zeller (F.): Zur Erkeuntnisz unserer Staatswirthschaftlichen Zustände. Berlin, 1885.

II. — Gabinete de historia natural

Sobre este gabinete veja-se o *Annuario* para 1878-1879, pag. 39-41.

Relação d'apparelhos e mineraes obtidos este anno:

Microscopio para trabalhos de mineralogia de Zeiss com o apparelho de illuminação de Albe, cinco oculares, seis objectivos, micrometros objectivos e oculares e camara clara de Abbe.

Goniometro de Carrangeot.

Goniometro de Wollaston.

Dichroscopio de Haidinger.

50 preparações microscopicas de rochas.

10 mineraes dichroicos.

25 laminas de crystaes uni e biaxiaes.

100 mineraes mostrando a diversidade de côr e lustre.

75 mineraes para o estudo das modalidades de estructura, fractura e aggregação.

25 mineraes mostrando as principaes direcções de clivagem.

25 mineraes para a demonstração das propriedades opticas.

25 mineraes para mostrar a diversidade de peso especifico.

25 mineraes para o estudo dos phenomenos electricos e magneticos.

25 mineraes para o estudo das propriedades organolepticas.

100 pseudomorphoses.

300 exemplares de rochas e fosseis.

III. — Gabinete de Machinas e de Physica

Sobre este gabinete veja-se o *Annuario* para 1884-1886, pag. 57.

IV. — Laboratorio Chimico

1.—Sobre este Laboratorio veja-se o *Annuario* de 1878-1879, pag. 45-59; *Annuario* de 1879-1880, pag. 47-57; *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-67; *Annuario* de 1881-1882, pag. 83-97; *Annuario* de 1882-1883, pag. 143-162; *Annuario* de 1883-1884, pag. 117-203; *Annuario* de 1884-1885, pag. 58-59.

2.—Apparelhos adquiridos para o laboratorio:

1 Apparelho de Berthelot para medir o calor especifico dos liquidos, I.

307— 1 Apparelho de Scheibler completo, para seccar e evaporar no vacuo, I.

146— 2 Apparelhos para desenvolver acido sulphydrico ou carbonico, I.

897— 4 Apparelhos de deslocamento de Drechsel (2 de 250 centimetros e 2 de 500 centimetros), I.

95— 1 Apparelho de Victor Meyer, para determinar a densidade dos vapores, I.

96— 1 Apparelho. Idem, outro modelo, I.

101— 3 Apparelhos de Anschütz e Schulz, para determinar o ponto de fusão, I.

Apparelho para determinar o ponto 0 dos thermometros, I.

1 Apparelho de Jungfleisch para a preparação da acetylena, I.

1448—12 Arcos de madeira, (2 de 18 cent.; 2 de 21; 2 de 25; 2 de 30; 2 de 35; 2 de 40), IX.

496— 1 Armadura para tubos de Geissler, IX.

1 Balão de 10 litros, de collo curto, para a theoria da fabricação do acido sulfurico, I.

1041—10 Balões de collo estreito, (5 de 1000 cent.; 5 de 500 cent.), X.

738— 1 Barometro de Geissler, I.

495— 1 Bobina de inducção de Rhumkorff, n.º 3, I.

259 *l*— 2 Campanas de torneira, com manometro, assentes sobre prato de vidro, X.

14—40 Capsulas de porcellana de Berlim, de fundo chato e bico: (10 n.º 1; 10 n.º 2; 10 n.º 3; 10 n.º 4), XI.

948— 3 Cavalleiros de centigramma, VI.

949— 3 Cavalleiros de milligramma, de fio d'aluminio, VI.

299— 1 Desseccador de Fresenius, com torneira e tubo na tampa, para o vacuo, I.

1735— 2 Desseccadores de Scheibler, I.

2 Frascos de 10 litros para o apparelho de analyse organica de Cloez, X.

683— 5 Frascos para densidades, com tara, de 10, 20, 25, 50, 100 gr. em um estojo, IV.

1 Frasco de dois orificios para o apparelho de Cloez, X.

95— 5 Frascos pequenos para determinação de densidades, IV.

259 f—15 Frascos Erlemmeyer de fórma conica para filtrações accelleradas, de 350, 400, 500 cent., X.

1733— 4 Funis de Victor Meyer de 21 e 26 cent., X.

1574— 4 Garrafas de lavagem com rolha esmerilhada de 400 cent., IX.

1006— 1 Hygrometro de cabello de Hermann e Pfister, IX.

1060— 1 Machuca-rolhas de ferro, IX.

Pesos de aluminio, 3 collecções: de 0,0001; 0,0002; 0,0005; 0,001; 0,002; 0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 gr., com pinça, em um estojo, IV.

689— 1 Picnometro de Sprengel, IV.

781— 1 Pilha de 4 elementos de Keiser e Schmidt, I.

1 Pipeta de Mohr com estojo, V.

1 Proveta de seccar para o apparelho de Cloez, X.

2 Pyrometros de Berthelot, sem supporte, VII.

1 Pyrometro calorimetrico de Salleron, VII.

1 Regulador Moitessier, IX.

1454—20 Retortas tubuladas, de 250, 500, 1000 cc., X.

2 Rolhas de cobre para o apparelho d'analyse organica, IX.

739— 1 Supporte com pinça, para o barometro, IX.

1 Thermometro para o barometro, VII.

272— 4 Trompas hydropneumaticas aperfeiçoadas, de Bulk, IX.

271— 4 Trompas hydropneumaticas aperfeiçoadas, de Bulk, pequenas, IX.

3 Tubos curvos nas extremidades, para chloreto de calcio, para o apparelho de Cloez, X.

2 Tubos de ferro para o apparelho de Cloez, IX.

1478*b*—10 Tubos de destillação fraccionada, de 300 e 400 cc., I.

833— 4 Vasos de porcellana, para decantação, de 3 e 6 litros, XI.

N. B. Os números que antecedem estes artigos são os do *Preis-verzeichimes Cheimischer apparate*, von C. Gerhardt, Sechste auflage, Bonn, 1882.

3 Allongas, X.

Apparelho de Berthelot para determinar o ponto de ebullição, I.

Apparelho de Schloesing para doseamento de ammoniaco, II.

2 Apparelhos de S.te Claire Deville para filtrar o mercurio, I.

Apparelho de Zulkorwsky, para recolher o azoto, I.

Apparelho de Stadel, idem, I.

18 Balões, X.

Balão de densidades de Chancel, IV.

5 Balões de 300 cc. para determinações calorimetricas, de Baudin, V.

5 Ditos de 500, V.

5 Ditos de 1000, V.

Bureta de gaz de Bunte, III.

4 Copos de experiencias, X.

Estufa de Anchütz e Kekulé, IX.

Estufa de Wiesnegg, IX.

4 Frascos com rolha comprida e em ponta, de dupla rolha a capsula, X.

4 Frascos tubulados, X.

5 Funis de bola para filtração d'acidos sobre o amiantho, de 9 cent. de diametro, X.
2 Funis de cobre, IX.
Mesa de experiencias de electricidade, I.
5 Matrazes para oxydo de cobre, X.
Microscopio invertido para estudos chimicos, I.
5 Pipetas para gazes, simples, III.
2 Pipetas para trasvasar gazes, duplo cylindro, III.
50 Pires de porcellana para o apparelho de Marsh, IX.
3 Placas porosas absorventes de 12 vezes 17 cent.
6 Provetas para chloreto de calcio, para balanças, grande modelo, X.
18 Retortas, X.
8 Retortas tubuladas, X.
2 Syphões de torneira para acidos, X.
1 metro de têa de cobre, IX.
2 Thermometros calorimetricos de 0° a 13°, divididos em $\frac{1^\circ}{50}$, construidos por Baudin, n.os 10423 e 10424, VII.
2 Ditos de 12 a 23°, n.os 10425 e 10426, VII.
2 Ditos n.os 10427 e 10428, VII.
1 Dito de 1° a 30°, dividido em $\frac{1}{10}$, VII.
20 Tubos em U para doseamento da agua, X.
15 Tubos para pesagens, X.
2 Tubos de Winkler, X.
1 k.° Tubo de cautchu, IX.
Vareta de carvão, IX.
2 Vasos electrolyticos, X.
10 Vasos de precipitação, X.
5 Ditos de 250 cc., X.
5 Ditos de 500 cc., X.

N. B. Os numeros romanos depois dos artigos referem-se ás divisões adoptadas no catalogo (Annuario da Academia Polytechnica de 1883-1884 pag. 117).

V.—Jardim Botanico

1. Sobre este jardim veja-se: *Annuario* de 1877-1878, pag. 29-30; *Annuario* de 1878-1879, pag. 51-56; *Annuario* de 1879-1880, pag. 44-45 e 230; *Annuario* de 1880-1881, pag. 56-57; *Annuario* de 1881-1882, pag. 99-113; *Annuario* de 1882-1883, pag. 137-142; *Annuario* de 1883-1884, pag. 203-247.

VI.—Observatorio Astronomico

Veja-se a *Memoria historica* do conselheiro Adriano Machado, já citada, *Annuario* de 1877-1878, pag. 207 e 223. Conserva-se, ainda hoje, imprestavel para observações.

1—*Collecções de instrumentos astronomicos e maritimos.* Vejam-se os artigos XLIX e LVII do decreto de 29 de julho de 1803; a memoria, já citada, a pag. 206 do *Annuario* de 1877-1878; *Annuario* para 1878-1879, pag. 57-59; e o *Annuario* para 1884-1885, pag. 60.

Relação dos instrumentos de topographia comprados no presente anno lectivo:

Um theodolito.

Um tacheometro.

VII.—Gabinete de Cinematica (Systema Reuleaux)

Director, o lente da 3.ª cadeira J. A. Albuquerque

Continuação do catalogo publicado nos *Annuarios* de 1881-1882, pag. 115 a 120, de 1884-1885, pag. 61 e 62. (Modelos adquiridos no anno lectivo anterior).

Numeração geral	Numeração de classe	DESIGNAÇÃO DOS MODELOS	Formulas
		M.) **Parafusos**	
70	1	Cadeia simples de parafuso. . . . } reversiveis.	$(S\overset{+}{-}PC)$
71	2	Cadeia de parafuso } reversiveis.	(S')
72	3	Dito . . . . . . } reversiveis.	(S'_2C')
73	4	Cadeia de parafuso com espera movendo-se automaticamente	$(S'P'C')^c+2(C''C_z)$
74	5	Parafuso alternante de *Whitworth*	$(S'P'C')^c_5$
75	6	Parafuso duplo de *Napier*. . .	$(\vec{S}P'C')^c+(C'P)$
76	7	Parafuso differencial	(S'_2P')
77	8	Parafuso differencial com engrenagem de rodas.	$(S'C'P')+2(C''_2C_z)$
78	9	Machina furadora cylindrica com rodas recorrentes . . .	$(S'P'C')+(C_{2z}C''_3)$

FREQUENCIA—ESTATISTICAS

Lista alphabetica dos alumnos da Academia, indicando a sua filiação, naturalidade, e as cadeiras em que se matricularam

1—Abel Brandão Leite Pereira Cardoso de Magalhães, filho de Antonio Brandão de Andrade da Cunha e Lima, natural de Thomé de Covellos, concelho de Baião—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

2—Abel Fontoura da Costa, filho de João Maria da Costa, natural de Alpiárça, concelho de Almeirim—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

3—Abilio Ribeiro de Miranda, filho de Joaquim Corrêa de Miranda, natural de Santo Thyrso—1.ª, 6.ª (1.ª parte), e 8.ª (2.ª parte);

4—Accacio de Sampaio Telles e Paiva, filho de José de Paiva Cardoso, natural de Leiria—8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

5—Adelino Pereira da Silva, filho de Francisco Pereira da Silva, natural de Leiria—6.ª (1.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

6—Affonso da Silveira Machado de Vasconcellos Castello Branco, filho de João da Silveira Machado Castello Branco, natural de Vizeu—3.ª e 4.ª (1.ª parte), e 6.ª (1.ª parte);

7—Adolpho Augusto de Vasconcellos Artayett, filho de José Augusto de Vasconcellos Artayett, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

8—Adolpho Augusto Baptista Ramires, filho de Antonio Augusto Baptista, natural de Bragança—1.ª, 6.ª (1.ª parte), e 18.ª (1.ª parte);

9—Adolpho Maria Barbosa, filho de Antonio Joaquim Rodrigues Barbosa, natural de S. Salvador, concelho de Villa Pouca d'Aguiar—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), e 11.ª (1.ª parte);

10—Albano Annibal de Barros, filho de Francisco Augusto de Barros, natural de Bragança—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

11—Albano Augusto d'Oliveira, filho de Delphina da Rocha Oliveira, natural de Recarei, concelho de Paredes—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

12—Alberto Alvaro d'Armada, filho de Joaquim Alvaro d'Armada, natural do Rio de Janeiro, freguezia de S. José—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

13—Alberto Augusto Gomes d'Almeida, filho de José Gomes d'Almeida, natural de Castellões, concelho de Macieira de Cambra—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

14—Alberto Barbosa de Queiroz, filho de Antonio Barbosa de Queiroz, natural d'Ancede, concelho de Baião—11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

15—Alberto Nunes de Figueiredo, filho de Agostinho José de Figueiredo, natural do Porto—1.ª;

16—Alberto Ortigão de Miranda, filho de João Baptista de Miranda Lima, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

17—Alberto Pereira Pinto d'Aguiar, filho de Anna Emilia d'Aguiar, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

18—Alberto Vieira Gomes, filho de Manoel Joaquim Gomes, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

19—Alberto Xavier Teixeira de Barros, filho de Ignacio Xavier Teixeira de Barros, natural de Viade, concelho de Celorico de Basto—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

20—Alexandre Carneiro Geraldes da Silva Moreira, filho de José Carneiro Geraldes da Silva Moreira, natural de Villa-Boa do Bispo, concelho d'Amarante—4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª parte);

21—D. Alexandre de Castro Pamplona, filho do conde de Rezende, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

22—Alexandre Gomes da Silva, filho de Antonio Gomes da Silva, natural de Villa Nova de Gaya—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

23—Alexandre Martins Pamplona Ramos, filho de Antonio Ramos Moniz Corte Real, natural de S. Pedro dos Biscoitos, concelho de Villa Nova da Praia (Ilha Terceira)—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte):

24—Alfredo Araujo d'Almeida Campos, filho de Antonio d'Almeida Querido, natural do Porto—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

25—Alfredo Arthur Lopes Navarro, filho de Antonio José Lopes Navarro, natural de Coimbra—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

26—Alfredo Augusto Lisboa de Lima, filho de José Maria de Lima, natural de Lamego—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

27—Alfredo Baptista Coelho, filho de João Baptista Coelho, natural de Santo Thyrso—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

28—Alfredo de Barros Leal, filho de José Joaquim de Barros, natural de Perozêllo, concelho de Penafiel—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

29—Alfredo da Costa Rodrigues, filho de Antonio da Costa Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

30—Alfredo Ernesto Dias Branco, filho de Henrique Guilherme Thomaz Branco, natural de Villa Real—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

31—Alfredo Pereira Martins de Lima, filho de José Joaquim Martins de Lima, natural de Vianna do Castello—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

32—Alfredo Pereira Pimenta, filho de Eduardo Pereira Pimenta, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

33—Alfredo Simões Ramos, filho de José Ramos de Proença Saraiva, natural de Souto da Caza, concelho de Fundão—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

34—Alfredo da Silva Reis, filho de João José da Silva, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

35—Alfredo de Souza Azevedo, filho de João Baptista de Souza Azevedo, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

36—Alipio Augusto Trancoso, filho de Firmino Antonio Trancoso, natural de Bragança—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

37—Alvaro Aurelio de Souza Rego, filho de José Maria Rego, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

38—Alvaro Augusto Ferreira, filho de Antonio Bernardo Ferreira, natural do Porto—2.ª, 4.ª (1.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

39—Amilcar de Castro Abreu e Motta, filho de João Maria d'Abreu e Motta, natural de Arcos de Val-de-Vez—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

40—Annibal Augusto Sanches Souza e Miranda, filho de Eduardo Augusto Sanches Souza Miranda, natural de Beja—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 8.ª (2.ª parte);

41—Annibal Augusto Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

42—Annibal Barbosa de Pinho Lousada, filho de Luiz Barbosa de Pinho Louzada, natural de Irivo, concelho de Penafiel—11.ª (1.ª parte);

43—Annibal Bettencourt, filho de Nicolau Moniz Bettencourt, natura[1] d'Angra do Heroismo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

44—Annibal Lopes Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

45—Anthero Elysio do Nascimento Trigo, filho de Antonio Manoel Trigo, natural de Moncorvo—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

46—Antonio Alberto Rodrigues Bello, filho de Antonio Moreira Bello, natural do Porto—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

47—Antonio d'Almeida Moraes Pessanha, filho de José Pereira da Silva Cardoso, natural de Passos, concelho de Sabroza—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

48—Antonio Augusto d'Aguiar Cardoso, filho de Silvestre d'Aguiar Bizarro, natural da Villa da Feira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

49—Antonio Augusto d'Almeida, filho de João Antonio d'Almeida, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

50—Antonio Augusto de Castro Soares, filho de José Bonifacio do Carmo Soares, natural de Oleiros, concelho da Feira—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

51—Antonio Augusto Pereira Cardoso, filho de João Pereira Cardoso, natural d'Armamar—10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

52—Antonio Augusto da Rocha Peixoto, filho de Antonio Luiz da Rocha Peixoto, natural da Povoa de Varzim—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

53—Antonio Baptista Alves de Lemos, filho de Joaquim Baptista Alves de Lemos, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

54—Antonio Duarte Pereira da Silva, filho de José Duarte Pereira, natural de S. Miguel de Bairros, concelho de Castello de Paiva—3.ª, 4.ª, (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

55—Antonio Evaristo de Moraes Rocha, filho de João Evaristo Rocha, natural de Chaves—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

56—Antonio Ferreira da Silva Barros, filho de José Ferreira da Silva Barros, natural de S. Mamede de Infesta, concelho de Bouças—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 9.ª;

57—Antonio Geraldo da Cunha, filho de José da Cunha Alves de Souza, natural de Braga—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

58—Antonio Joaquim de Gouveia Osorio, exposto, natural de Moncorvo—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª);

59—Antonio Joaquim Judice Cabral, filho de José Augusto Pinto Cabral, natural de Lagos—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

60—Antonio José de Lima, filho de José Antonio de Lima, natural de Pereiro, concelho de Barcellos—3.ª, 4.ª, (1.ª parte) 16.ª (1.ª parte) 18.ª (3.ª parte);

61—Antonio José da Motta Campos Junior, filho de Antonio José da Motta Campos, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

62—Antonio José Teixeira Junior, filho de Antonio José Teixeira, natural de Casaes do Douro, districto de Vizeu—3.ª, 4.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

63—Antonio Julio Ferreira de Barros, filho de Sabino Ferreira de Barros, natural de Murça, districto de Villa Real—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

64—Antonio Lopes Baptista, filho de João Lopes Baptista, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

65—Antonio Luiz Soares Duarte, filho de Manoel Francisco Duarte, natural do Porto—4.ª (1.ª parte) e 5.ª (1.ª parte);

66—Antonio Manoel Botelho, filho de Francisco de Paula Botelho, natural de Belem—2.ª, 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

67—Antonio Manoel Pelleias, filho de Luiz Manoel Pelleias, natural da Torre de Dona Chamma, concelho de Mirandella—1.ª e 9.ª;

68—Antonio Maria Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Provezende, concelho de Sabroza—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte), 11.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

69—Antonio Martins Delgado, filho de João Martins Delgado, natural de Perre, concelho de Vianna do Castello—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

70—Antonio Pedro Saraiva, filho de José Pedro Saraiva, natural de Villa Nova de Fozcôa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

71—Antonio Pinto Rodrigues Fernandes, filho de Joaquim Pinto Fernandes, natural d'Ancede, concelho de Baião—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 6.ª (1.ª parte) e 16.ª (1.ª parte);

72—Antonio Rigaud Nogueira, filho de Francisco Rodrigues Nogueira, natural da Bahia (Brazil)—4.ª (2.ª parte), 5.ª (1.ª parte) e 9.ª —;

73—Antonio dos Santos Pinto, filho de Manoel dos Santos Pinto, natural de S. Bartholomeu de Paramos, concelho de Carrazeda d'Anciães—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª) e 11.ª (1.ª parte);

74—Antonio de Souza Monteiro, filho de Manoel Monteiro, natural de Leiria—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª e 14.ª —;

75—Antonio Thomaz Ferreira Cardoso, filho de Antonio Joaquim Santhiago, natural d'Oliveira d'Azemeis—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

76—Antonio Xavier Gomes dos Santos, filho de Antonio Gomes dos Santos, natural de S. Miguel do Souto, concelho da Feira—3.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

77—Armindo Augusto Girão Guimarães, filho de José Antonio Girão, natural de Vizeu—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

78—Arnaldo Arthur Ferreira Braga, filho de Arthur Aureliano Ferreira Braga, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

79—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira, filho de João Antonio Lourenço Gomes Ferreira, natural de Villarinho de Castanheiro, concelho de Carrazeda d'Anciães—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

80—Arthur Alberto Vaz Pereira, filho de Antonio Pereira, natural de Valença do Minho—11.ª (1.ª parte);

81—Arthur Augusto d'Albuquerque Seabra, filho de Armando Arthur

Ferreira de Seabra da Motta e Silva, natural do Porto—4.ª (1.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 8.ª, (2.ª parte) e 9.ª;

82—Arthur Hygino Soares, filho de José Victorino Soares, natural d'Angra do Heroismo—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

83—Arthur Mendes de Magalhães Ramalho, filho de João Mendes de Magalhães, natural de Lamego—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª, 14.ª, 15.ª e 18.ª (3.ª parte);

84—Arthur Pinto Malheiro, filho de Manuel Pinto Malheiro, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

85—Arthur Vieira de Castro, filho de José Antonio Vieira de Castro, natural de Fafe—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), e 10.ª (1.ª parte);

86—Augusto Guedes da Silva, filho de Clemente Guedes da Silva, natural de Crestuma, concelho de Villa Nova de Gaya—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

87—Augusto Vieira Nobre, filho de José Pereira Nobre, natural do Porto—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

88—Augusto Velloso Ferreira, filho de Augusto Alberto da Silva Ferreira, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

89—D. Aurelia de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

90—Aurelio Belizario Carrajola Travassos Neves, filho de José Francisco Travassos Neves, natural de Tavira—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 6.ª (1.ª parte);

91—Bellarmino Baptista Vasconcellos, filho de Antonio Soares Moreira de Vasconcellos, natural de Cepellos, concelho d'Amarante—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

92—Bento de Carvalho Miranda, filho de José de Carvalho Miranda Leite, natural do Porto—2.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte):

93—Bernardo José Borges, filho de Manuel José Borges, natural da Regoa—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

94—Bomfilho Diniz, filho de Antonio Diniz, natural de Macau—9.ª, 10.ª (1.ª parte), 18.ª (2.ª e 3.ª parte);

95—Carlos Alberto Vianna Pedreira, filho de Joaquim Maria Pedreira, natural de Vianna do Castello—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

96—Carlos d'Andrade Villares, filho de Antonio Joaquim d'Andrade Villares, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte):

97—Carlos Augusto Afflalo Carneiro Geraldes, filho de José Carneiro Geraldes, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

98—Carlos Augusto Teixeira Babo, filho de José Joaquim Teixeira Babo, natural de Figueiró, concelho d'Amarante—11.ª (1.ª parte);

99—Carlos Fernando Brou, filho de Francisco Pedro Brou, natural de Lisboa—1.ª, 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

100—Carlos Frederico Braga, filho de Frederico Ernesto Braga, natural do Porto—1.ª —;

101—Carlos Henriques Coisne, filho de Pedro Francisco José Coisne, natural de Steeniverk (França)—2.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

102—Carlos Henriques da Silva Maia Pinto, filho de Henrique Pinto, natural do Porto—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

103—Carlos José Gomes Brandão, filho de José Antonio Gomes Brandão, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—2.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

104—Casimiro Antonio d'Oliveira, filho de Francisco José d'Oliveira, natural de Mosteiro, concelho de Vieira—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

105—Casimiro Jeronymo de Faria, filho de Jeronymo Domingos de Faria, natural de Galafura, concelho da Regoa—3.ª, 4.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

106—Cesar Augusto Gonçalves da Costa Lima, filho de Francisco Gonçalves da Costa Lima, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

107—Christovão Teixeira Machado, filho de Francisco Teixeira Machado, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

108—Custodio Martins Henriques, filho de Joaquim Martins Henriques, natural de Pecegueiro, concelho de Sever do Vouga,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

109—Delfim Ferreira da Silva, filho de Antonio Joaquim Ferreira da Silva, natural de Couto de Cucujães, concelho de Oliveira d'Azemeis—7.ª (1.ª parte);

110—Deolindo Ferreira de Mello e Souza, filho de José Ferreira de Mello, natural de Margaride, concelho de Felgueiras,—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

111—Eduardo Alfredo de Souza, filho de João José de Souza, natural do Porto,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

112—Eduardo Augusto Soares de Freitas, filho de Antonio Joaquim de Freitas, natural de Villa Cova da Lixa,—6.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

113—Eduardo de Barros, filho de Adelaide Candida de Barros, natural do Porto,—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

114—Eduardo Gonçalves de Mattos, filho de José Gonçalves de Mattos, natural do Porto,—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª) e 10.ª (1.ª parte);

115—Eduardo de Moura, filho de Francisco Antonio Marques de Moura, natural de Ilhavo,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

116—Eduardo Nunes d'Oliveira, filho de Manuel Nunes Cancella, natural de Figueiró dos Vinhos,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

117—Eduardo Teixeira Leite, filho de Antonio Teixeira Leite, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—4.ª (1.ª parte), 5.ª (1.ª parte) 9.ª, 11.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

118—Eduino Rocha, filho de Justino Augusto Rocha, natural da Horta, ilha do Fayal (Açores),—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

119—Ernesto Augusto de Castro Guimarães, filho de João Jeronymo da Fonseca Guimarães, natural do Porto—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 17.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

120—Ernesto Eugenio Alves de Souza Junior, filho de Ernesto Eugenio Alves de Souza, natural do Porto—12.ª, 13.ª e 14.ª;

121—Feliciano Moreira Alves, filho de Manoel Moreira Alves, natural de Capello, concelho de Penafiel—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

122—Fernando José d'Almeida, filho de Francisco José d'Almeida, natural de S. Pedro do Sul—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

123—Fernando de Miranda Montenegro, filho de Manoel Monteiro da Silva Ribeiro de Miranda, natural do Porto—11.ª (1.ª parte);

124—Fernando de Souza Magalhães, filho de Antonio Ignacio de Souza, natural de Jugueiros, concelho de Villa do Conde—4.ª (1.ª parte), 5.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 9.ª, 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

125—Filippe de Souza Carneiro Canavarro, filho de Cypriano de Souza Carneiro Canavarro, natural da Regoa—12.ª 13.ª e 14.ª;

126—Flavio Augusto Marinho Paes, filho de Carlos Augusto Paes, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

127—Flavio Norberto de Barros, filho de Manoel Antonio de Barros, natural de Valença do Minho—8.ª (1.ª e 2.ª) e 10.ª (1.ª parte);

128—Fortunato d'Azevedo Varella, filho de Antonio d'Azevedo Varella, natural de Infias, concelho de Guimarães—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

129—Francisco Antonio de Magalhães, filho de Antonio Manoel de Magalhães, natural de Sarzedinho, concelho de S. João da Pesqueira—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

130—Francisco d'Araujo Castro Coutinho, filho de Francisco José d'Araujo, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

131—Francisco Bernardino Pinheiro de Meirelles Junior, filho de Francisco Bernardino Pinheiro de Meirelles, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

132—Francisco Ferreira Figueiredo Leitão, filho de José Ferreira Figueiredo Leitão, natural de Santa Eulalia de Bésteiros, concelho de Felgueiras—7.ª, (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

133—Francisco Forbes de Bessa, filho de Joaquim de Bessa Pinto, natural do Porto—2.ª 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

134—Francisco Ignacio Párra, filho de Simão Antonio Párra, natural de Urros, concelho de Mogadouro—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

135—Francisco Ignacio Valladas Paes, filho de Antonio Maria Valente Paes Senior, natural de Serpa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

136—Francisco de Pina Vaz, filho de Jacintho de Pina Vaz, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

137—Francisco da Rocha e Cunha, filho de Manuel da Rocha e Cunha, natural de Pedorido, concelho de Paiva—1.ª e 11.ª (1.ª parte);

138—Francisco de Souza Pinto Cardoso Machado, filho de José de Souza Pinto Cardoso Machado, natural de Balteiro, concelho de Armamar—5.ª (1.ª parte);

139—Francisco Xavier de Souza Pinto Leitão, filho de Jeronymo Pinto Leitão, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

140—Gaspar José Tavares de Castro, filho de Antonio Tavares, natural de Castellões de Cambra—11.ª (1.ª parte);

141—Gregorio Corrêa Pinto Rolla, filho de Simplicio Arlindo Corrêa Rolla, natural da Regoa—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

142—Guilherme Louzada Marcenal, filho de Francisco Louzada Marcenal, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

143—Guilherme Moreira Rodrigues Bello, filho de Antonio Moreira Bello, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

144—Guilherme Nunes Godinho, filho de Manuel Gomes Godinho, natural de Almeirim—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

145—Heitor Corrêa da Silva Sampaio, filho de João Corrêa da Silva Sampaio, natural de Braga—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

146—Henrique Carlos Rodrigues, filho de Antonio Francisco Rodrigues, natural do Porto—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

147—Henrique José Martins Ferreira, filho de Antonio José Martins Ferreira, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

148—Humberto Pinto de Castro Araujo, filho de Manuel Rodrigues Sequeira Araujo, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

149—Hugo de Noronha, filho de Tito Augusto Duarte Noronha, natural de Ovar—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

150—Izidoro Pedro Leger Pereira Leite, filho de Pedro Euzebio Leite, natural de Lisboa—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

151—Izolino Aurelio Ferreira Ennes, filho de José Augusto Ennes, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

152—Jayme Augusto da Graça Falcão, filho de José Maria da Graça, natural de Bragança—2.ª, 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

153—João Alves Martins, filho de José Alves Martins, natural de Fontes, concelho de Santa Martha de Penaguião—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

154—João Antunes Leite, filho de João Antunes Leite, natural de Lamego—11.ª (1.ª parte);

155—João Augusto dos Santos Teixeira, filho de Augusto Cesar Justino Teixeira, natural de Lamego—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

156—João Baptista Barreira Junior, filho de João Baptista Barreira, natural da Chamusca—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

157—João Carlos de Castro Corte Real Machado, filho de João Castro d'Almeida Machado, natural de Oliveirinha, concelho d'Aveiro—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

158—João Chrysostomo Baptista Alves Novaes, filho de José Antonio da Silva Baptista, natural de Villa Real—11.ª (1.ª parte);

159—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos, filho de João d'Oliveira Ramos, natural de Vallega, concelho de Ovar—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

160—João Delfim de Mattos Rivára, filho de Antonio Eloy da Cunha Rivára, natural de Arrayollos,—6.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª partes) e 11.ª (1.ª parte);

161—João Dias Pereira da Graça, filho de Januario Dias Pereira da Graça, natural de Sôza, concelho de Vagos,—8.ª (1.ª e 2.ª parte) 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

162—João Gomes da Silva Osorio Junior, filho de João Gomes da Silva Osorio, natural de Lamego,—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

163—João José Pimentel Teixeira Pinto Feio, filho de Francisco Antonio Pimentel Feio, natural de Chaves,—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

164—João Machado d'Araujo, filho de Joaquim da Costa Araujo, natural de Landim, concelho de Famalicão,—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

165—João Manoel Pires, filho de Domingos Pires, natural de Moledo, concelho de Caminha,—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

166—João Maximino de Carvalho, filho de Manoel Antonio de Carvalho, natural de Lamego,—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 4.ª (1.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

167—João de Mello Pereira Sampaio, filho de Paulo de Mello Pereira Sampaio, natural de Guimarães,—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

168—João Monteiro Guedes, filho de Rita Laró, natural de Moura Morta, concelho da Regoa,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

169—João Pacheco de Castro Côrte Real, filho de João Pacheco Godinho de Castro Côrte Real, natural de Avanca, concelho d'Estarreja,—7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

170—João Pereira Vasco, filho de Manoel Pereira Vasco, natural de Olhão,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

171—Joaquim Gaudencio Rodrigues Pacheco, filho de Antonio Pereira Rodrigues Pacheco d'Almeida, natural de Sande, concelho de Lamego,—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª, 14.ª, 15.ª e 18.ª (2.ª parte);

172—Joaquim José Pinto, filho de José Maria Pinto, natural de Penafiel,—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

173—Joaquim Raymundo da Fonseca, filho de Joaquim Antonio da Fonseca, natural de Olhão,—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

174—Joaquim da Silva Junior, filho de Soaquim da Silva, natural de Salreu, concelho d'Estarreja,—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

175—Joaquim de Souza Brandão, filho de Francisco José de Souza Brandão, natural de Lordello, concelho de Paredes,—6.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

176—Jorge Vieira, filho de José de Souza Vieira, natural do Porto, —11.ª (1.ª parte);

177—José Alves Bonifacio, filho de José Alves Bonifacio, natural de Castello de Neiva, concelho de Vianna do Castello,—5.ª (2.ª parte) 13.ª, 14.ª, 15.ª e 18.ª (3.ª parte);

178—José Alves Ferreira da Silva, filho de Augusto Alves Ferreira da Silva, natural de Santo Antonio da Lomba, concelho de Gondomar,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

179—José Antonio de Castro, filho de Francisco Antonio de Castro, natural de Villa Nova de Foscôa,—1.ª, 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

180—José Antonio Duarte, filho de Francisco Antonio Duarte, natural das Caldas da Rainha,—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

181—José Antonio Gonçalves Lima, filho de Antonio Gonçalves Lima, natural do Porto,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

182—José Antonio da Silva Moreira, filho de Antonio da Silva Moreira, natural do Porto,—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

183—José Baptista Cid, filho de José Baptista Cepéda Cid, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

184—José Baptista Gonçalves Dias Junior, filho de José Baptista Gonçalves Dias, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte):

185—José Caetano Ferreira Pinto dos Reis, filho de José Caetano dos Reis, natural de Lamas, concelho da Feira,—11.ª (1.ª parte);

186—José Corrêa Pinto da Fonseca, filho de José Francisco Corrêa Pinto, natural de Samodães, concelho de Lamego,—3.ª, 4.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

187—José da Cunha Rôlla, filho de José da Cunha Rôlla, natural de Santa Christina de Lordello, concelho de Felgueiras,—1.ª, 6.ª, (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

188—José Estevão Coelho de Magalhães, filho de José Estevão Coelho de Magalhães, natural de Lisboa—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

189—José Ferreira Ferrão Castello Branco, filho de José Antonio Ferreira Ferrão Castello Branco, natural de S. Thiago, concelho de Cêa—1.ª, 6.ª (1.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

190—José Gonçalves da Costa, filho de Manoel Gonçalves da Costa, natural de Balazar, concelho da Povoa de Varzim—5.ª (2.ª parte), 12.ª, 13.ª, 14.ª e 18.ª (2.ª parte);

191—José Guedes Junior, filho de José Guedes de Carvalho, natural de Ervedoza, concelho da Pesqueira—3.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

192—José Henriques Meirelles Pinto, filho de Manoel Antonio Meirelles, natural da freguezia de S. Bartholomeu, concelho de Villa Flôr—7.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

193—José Lopes dos Rios, filho de José Lopes Rios, natural do Porto—1.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte);

194—José Machado Pinto Saraiva, filho de Felix Tristão Pinto Saraiva, natural de Villa Real—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

195—José Maria Rebello da Silva, filho de José Antonio Rebello da Silva, natural de Braga—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

196—José Maria Rebello Valente de Carvalho, filho de João Nepomuceno Rebello Valente, natural de Oliveira de Azemeis—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

197—José Maria Rodrigues de Faria, filho de Lino Antonio Rodrigues de Faria, natural de S. Thiago de Lanhoso, concelho de Povoa de Lanhoso—7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

198—José Mendes Esteves Guimarães, filho de Antonio José Esteves Guimarães, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

199—José Rodrigues Braga, filho de José Rodrigues Braga, natural de Chaves—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

200—José Rodrigues Gonçalves Curado, filho de Miguel Gonçalves Curado e Silva, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

201—José Vicente d'Araujo, filho de Antonio Vicencio de Araujo, natural de Villa do Conde—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

202—José Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

203—Julio Baptista da Cunha Braga, filho de João Baptista Braga, natural de Braga—6.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

204—Julio Lopes Valente da Cruz, filho de João Carlos da Cruz, natural da Guarda—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

205—Lauriano Pereira de Castro Brito Junior, filho de Lauriano Pereira de Castro e Brito, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

206—D. Laurinda de Moraes Sarmento, filha de Anselmo Evaristo de Moraes Sarmento, natural do Porto—10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

207—Lucindo Martins d'Oliveira, filho de Francisco Moreira de Oliveira, natural de Souza, concelho de Gondomar—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

208—Luiz de Freitas Viegas, filho de Luiz de Freitas Viegas, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

209—Luiz Gonzaga Vaz da Victoria, filho de Faustino José da Victoria, natural do Porto—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte) e 9.ª;

210—Luiz José de Lima, filho de Antonio José de Lima Junior, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

211—Luiz Pinto Ribeiro da Fonseca, filho de Manoel Ribeiro da Fonseca, natural de Villar do Paraiso, concelho de Villa Nova de Gaya—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

212—Luiz de Souza Lemos, filho de Antonio Alves de Souza, natural de Castello de Vide—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

213—Manoel Augusto Dias Milheiro, filho de Francisco José Milheiro, natural de Grijó, concelho de Villa Nova de Gaya—8.ª (1.ª e 2.ª parte), 10.ª (1.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

214—Manoel Augusto Gomes de Faria, filho de João Gomes de Faria, natural d'Arnôso, concelho de Famalicão—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

215—Manoel Augusto de Queiroz e Castro, filho de Joaquim Augusto de Queiroz, natural de S. Cosmado, concelho d'Armamar—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 11.ª (1.ª parte);

216—Manoel Barba de Menezes, filho de Carolina Guerreiro Canto Lobo, natural de Lisboa—1.ª, 6.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

217—Manoel Garrido Monteiro, filho de Manoel Garrido Baqueiro, natural de Santa Maria d'Insua, concelho de Ponte-Caldella (Galliza)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

218—Manoel Gonçalves d'Araujo, filho de Luiz Gonçalves de Araujo, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

219—Manoel José Aguia, filho de Francisco Aguia, natural de Candêdo—8.ª (1.ª e 2.ª parte);

220—Manoel José Ferreira de Miranda, filho de Domingos José Ferreira, natural de Villar de Figos, concelho de Barcellos—7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

221—Manoel Luiz Mendes, filho de João Francisco Mendes, natural do Seara, concelho de Ponte do Lima—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

222—Manoel Marques de Lemos, filho de Margarida Ferreira dos Santos, natural de Albergaria-Velha—11.ª (1.ª parte);

223—Manoel de Medeiros Tavares, filho de Viriato de Freitas Tavares, natural de Pernambuco (Brazil)—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte), 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

224—Manoel Nunes de Oliveira, filho de José Nunes d'Oliveira, natural de Sôsa, concelho de Vagos—6.ª (1.ª parte), 7.ª (1.ª parte) e 8.ª (1.ª e 2.ª parte);

225—Manoel Pinto Pimentel, filho de Joaquim Pinto Furtado, natural de Favaios, concelho d'Alijó—7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

226—Manoel de Souza Machado Junior, filho de Manoel de Souza Machado, natural do Porto—3.ª, 4.ª (1.ª parte), 8.ª (2.ª parte), 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

227—Miguel Albano Cerqueira Coimbra, filho de Joaquim Augusto Rodrigues Coimbra, natural d'Amarante—8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

228—Olympio Vieira Pinto dos Reis, filho de Joaquim Vieira Pinto dos Reis, natural do Porto—1.ª, 7.ª (1.ª parte), 17.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

229—Oscar Cibrão e Garção, filho de Francisco Luiz Garção, natural de Valença do Minho—1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

230—Paulo Ferreira, filho de Luiz José Ferreira, natural do Porto —1.ª, 7.ª (1.ª parte) e 18.ª (1.ª parte);

231—Raul Corrêa Bettencourt Furtado, filho de José Candido de Bettencourt Furtado, natural da Ilha do Fayal—1.ª e 6.ª (1.ª parte);

232—Raul Larose Rocha, filho de José Gonçalves Rocha, natural do Porto—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

233—Raymundo Ferreira dos Santos, filho de Antonio Ferreira dos Santos, natural do Porto—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) 9.ª e 18.ª (3.ª parte);

234—Ricardo Severo da Fonseca Costa, filho de José Antonio da Fonseca Costa, natural de Lisboa—3.ª, 4.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 16.ª (1.ª parte) e 18.ª (3.ª parte);

235—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães, filho de Augusto Dias Guimarães, natural do Porto,—4.ª (2.ª parte) 5.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) 9.ª e 10.ª (1.ª parte);

236—Romão José Braz Fernandes, filho de José Braz Fernandes, natural da Regoa,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

237—Ruy da Rocha e Castro, filho de Agostinho da Rocha e Castro, natural do Porto—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

238—Sebastião Barroso Monge, filho de Pedro Monge, natural d'Aldeia Nova, concelho de Serpa,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

239—Theodorico Teixeira Pimentel, filho de João Rodrigues Pimentel, natural de Alijó,—2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) 10.ª (1.ª parte) e 18.ª (2.ª parte);

240—Vasco Ortigão de Sampaio, filho de José Joaquim d'Oliveira Sampaio, natural do Rio de Janeiro (Brazil)—1.ª, 2.ª, 6.ª (1.ª parte) 8.ª (2.ª parte) e 18.ª (1.ª e 2.ª parte):

241—Vicente de Bessa, filho de Leonardo Joaquim de Bessa, natural de Real, concelho de Castello de Paiva, 6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

242—Victor Henriques Ayres Móra, filho de Emygdio Antonio Móra, natural do Sardoal,—6.ª (1.ª parte) 7.ª (1.ª parte) 8.ª (1.ª e 2.ª parte) e 10.ª (1.ª parte);

Quadro estatistico dos alumnos matriculados em 1886 e 1887 distribuidos segundo a sua naturalidade

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos: por conc.	Numero de alumnos: por dist.	Numero de alumnos: TOTAL
Porto	Amarante	3	96	115
	Baião	3		
	Bouças	1		
	Felgueiras	3		
	Gondomar	2		
	Marco de Canavezes	1		
	Paredes	2		
	Penafiel	4		
	Porto	66		
	Povoa de Varzim	2		
	Santo Thyrso	2		
	Villa do Conde	2		
	Villa Nova de Gaya	5		
Aveiro	Albergaria Velha	1	19	
	Aveiro	1		
	Castello de Paiva	3		
	Estarreja	2		
	Feira	4		
	Ilhavo	1		
	Oliveira d'Azemeis	3		
	Ovar	2		
	Sever do Vouga	1		
	Vagos	1		

Districtos	Concelhos	Numero de alumnos: por conc.	por dist.	Total
Transporte				115
Beja	Beja	2	3	
	Serpa	1		
Braga	Barcellos	2	14	
	Braga	4		
	Celorico de Basto	1		
	Fafe	1		
	Famalicão	2		
	Guimarães	2		
	Povoa de Lanhoso	1		
	Vieira	1		
Bragança	Bragança	4	13	
	Carrazeda d'Anciães	2		35
	Mirandella	1		
	Mogadouro	1		
	Moncorvo	3		
	Villa-Flor	1		
	Vinhaes	1		
C. Branco	Fundão	1	1	
Evora	Arrayollos	1	1	
Faro	Lagos	1	4	
	Olhão	2		
	Tavira	1		

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
Transporte				150
Guarda	Côa	1	3	
	Guarda	1		
	Villa Nova de Foz Côa	1		
Leiria	Caldas da Rainha	1	4	
	Leiria	3		
Lisboa	Belem	1	7	
	Lisboa	6		
Portalegre	Castello de Vide	1	1	
Santarem	Almeirim	2	4	50
	Chamusca	1		
	Sardoal	1		
V. do Castello	Arcos de Val-de-Vez	1	11	
	Caminha	2		
	Ponte do Lima	1		
	Valença	3		
	Vianna do Castello	4		
Villa Real	Alijó	2	20	
	Chaves	3		
	Murça	1		
	Regoa	6		
	Sabroza	2		
	Santa Martha de Penaguião	1		
	Villa Pouca d'Aguiar	1		
	Villa Real	4		

*

Districtos	CONCELHOS	NUMERO DE ALUMNOS por conc.	por dist.	TOTAL
	Transporte			200
Vizeu	Armamar	3	16	
	Lamego	8		
	Tondella	1		
	Vizeu	2		
	S. João da Pesqueira	1		
	S. Pedro do Sul	1		
	ILHAS ADJACENTES			
A. Heroismo	Angra do Heroismo	1	5	
Fayal	Fayal	3		
Praia	Praia	1		
	POSSESSÕES ULTRAMARINAS			36
E. G. da India	Macau	1	1	
	PAIZES ESTRANGEIROS			
HESPANHA (GALLIZA)	Ponte Caldella	1	1	
França	Steenwesk	1	1	
Brazil	Bahia	1	12	
	Pernambuco	1		
	Rio de Janeiro	10		
	Total geral			236

Quadro do exercicio dos cursos no anno lectivo de 1885 a 1886

DESIGNAÇÃO DOS CURSOS	ABERTURA DO CURSO	ENCERRAMENTO DO CURSO	N.º total das lições e exercicios	Duração das lições	N.º de horas semanaes de cada curso
1.ª—Geometria analytica no plano e no espaço; trigonometria espherica; algebra superior.	12 de novembro de 1885	22 de maio de 1886	59	2	6
2.ª—Calculo differencial e integral. . . .	10 » »	22 » »	62	2	6
3.ª—Mecanica racional: Cinematica . . .	9 » »	21 » »	63	2	6
4.ª—Geometria descriptiva	12 » »	21 » »	52	2	6
5.ª—Astronomia e geodesia	11 » »	22 » »	58	2	6
6.ª—Physica	9 » »	21 » »	49	2	6
7.ª—Chimica inorganica.	10 » »	21 » »	61	2	6
8.ª—Chimica organica e analytica. . . .	10 » »	21 » »	69	2	6
9.ª—Mineralogia e geologia	9 » »	21 » »	55	2	6
10.ª—Botanica	12 » »	21 » »	57	2	6
11.ª—Zoologia	9 » »	21 » »	56	2	6
12.ª—Resistencia de materiaes	13 » »	21 » »	53	2	6
14.ª—Construcções.	12 » »	21 » »	55	2	6
16.ª—Economia politica e direito administrativo	10 » »	21 » »	60	2	6
17.ª—Commercio	10 » »	20 » »	57	2	6
18.ª—Desenho	10 » »	21 » »	63	2	6

Alumnos premiados e distinctos nas cadeiras dos cursos da Academia no anno lectivo de 1885 e 1886, proclamados em sessão solemne de 20 d'outubro de 1886.

1.ª CADEIRA

Accessit.—Alberto Maria Lisboa de Lima.
Distincção.—Alfredo Augusto Lisboa de Lima.

2.ª CADEIRA

Premio honorifico.—João Chrysostomo d'Oliveira Ramos.
Accessit.—Manoel de Sousa Machado Junior.
Distincção.—Casimiro Jeronymo de Faria.

3.ª CADEIRA

Accessit.—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães.

5.ª CADEIRA

Accessit.—José Alves Bonifacio.

6.ª CADEIRA

Accessit.—Alberto Maria Lisboa de Lima.
1.ª distincção.—Manoel Augusto Dias Milheiro.
2.ª » —Antonio Augusto de Castro Soares.

7.ª CADEIRA

1.º accessit.—José Antonio de Castro.
» —José Maria Rebello da Silva.
2.º » Arthur Hygino Soares.
1.ª distincção.—Arnaldo Augusto Gomes Ferreira.
2.ª » —Humberto Pinto da Costa Araujo.

8.ª CADEIRA

Premio honorifico—José d'Oliveira Serrão d'Azevedo.
1.º accessit.—Antonio Augusto Pereira Cardoso.
» —Antonio Caetano Ferreira de Castro.
» —João Maria Pacheco da Silva Lemos.
2.º » —Antonio Coutinho d'Araujo Pimenta.
» —Antonio Venancio da Gama Pimentel.
» —Carlos Alberto de Lima.
» —João Leite de Castro.
» —Alberto d'Almeida Magro.
» —José Maria Marreiros.
» —Fernando de Miranda Monterrôso.
Distincção.—Carlos Affonso da Silva Rios.
» —José Pinto de Queiroz Magalhães.
» —Manoel José Pinhal.
» —Joaquim Augusto de Macedo Freitas.

10.ª CADEIRA

Distincção.—Alberto d'Almeida Magro.
» —Alypio Augusto Trancoso.
» —D. Maria Leite da Silva Tavares Paes Moreira.

11.ª CADEIRA

Accessit.—José de Oliveira Serrão d'Azevedo.
» —Carlos Alberto de Lima.
» Antonio Caetano Ferreira de Castro.
1.ª distincção.—João Leite de Castro.
2.ª » —Alberto d'Almeida Magro.
3.ª » —Ricardo de Lemos e Castro.
4.ª » —D. Maria Leite da Silva Tavares Paes Moreira.

12.ª CADEIRA

Accessit.—José Alves Bonifacio.

18.ª CADEIRA

Premio honorifico.—Rodolpho Ferreira Dias Guimarães.
Accessit.—Alfredo Augusto Lisboa de Lima.
Distincção.—Antonio Duarte Pereira da Silva.
» —Antonio José de Lima.

Designação dos alumnos que tiraram carta de capacidade de cursos da Academia no anno lectivo de 1884 e 1885

Nomes e designação do curso	Data em que foi conferida a carta de curso
Obras publicas	
José Maria de Mello de Mattos ..	9 de outubro de 1885.
Manoel d'Albuquerque de Mello Pereira e Caceres	12 de dezembro de 1885.
Theophilo Leal de Faria	9 de fevereiro de 1886.
Caetano Maria d'Amorim	22 de julho de 1886.
Francisco da Silva Monteiro	22 de julho de 1886.
Francisco Xavier Esteves......	22 de julho de 1886.
Joaquim Augusto de Macedo Freitas....................	22 de julho de 1886.
Minas	
Manoel d'Albuquerque de Mello Pereira e Caceres	12 de dezembro de 1885.
Theophilo Leal de Faria	5 de março de 1886.
Geographos	
Estevão Torres	1 de dezembro de 1885.
Agricultores	
Bento de Sousa Carqueja Junior.	10 de dezembro de 1885.

Mappa estatistico do movimento dos alumnos da Academia no anno lectivo de 1885 a 1886

CADEIRAS	ALUMNOS MATRICULADOS POR CADEIRAS		APPROVADOS		REPROVADOS	NÃO EXAMINADOS	ALUMNOS DISTINCTOS COM			TOTAL DOS DISTINCTOS
	ordinarios	voluntarios	n. d.	simp.			premio honorifico	accessit.	m. honrosa	
1.ª—(Algebra superior, etc.) . . .	21	29	12	5	4	32		1	1	2
2.ª—(Calculo differencial, etc.) . .	6	12	11	5	1	1	1	1	1	3
3.ª—(Mecanica; Cinematica) . . .	5	6	8	2		1		1		1
4.ª—(Geometria descriptiva) . . .	19	28	32	6	2	7				
5.ª—(Astronomia e geodesia) . . .	7	2	8		1			1		1
6.ª—(Physica)	21	35	33	11	3	9		1	2	3
7.ª—(Chimica inorganica)	32	57	39	8	8	34		3	3	6
8.ª—(Chimica organica e analytica)	36	55	27	4	16	44	1	10	4	15
9.ª—(Mineralogia e geologia) . . .	9	6	8			7				
10.ª—(Botanica)	25	58	65			19			3	3
11.ª—(Zoologia)	33	36	28		12	29		3	4	7
12.ª—(Resistencia de materiaes) . .	5	1	5			1		1		1
14.ª—(Construcções)	4	2	4			2				
16.ª—(Economia politica, etc.) . . .	9	12	11			10				
17.ª—(Commercio)	1	1	1			1				
18.ª—(Desenho)	31	42	37	19		20	1	1	2	4

DOCUMENTOS

PARA A HISTORIA DA

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

Relatorio da Commissão
nomeada por portaria de 31 de dezembro de 1880
para elaborar o plano do
edificio do Paço dos Estudos do Porto

ILLUSTRISSIMO E EX.^{mo} SNR.

A commissão nomeada por portaria de trinta e um de dezembro de mil oitocentos e sessenta, para proceder ao exame de todas as condições do edificio da Academia Polytechnica do Porto, organisar um plano geral da obra acompanhado das competentes plantas e desenhos, e finalmente confeccionar um orçamento com toda a possivel individuação, tem a honra de levar ao conhecimento de v. ex.^{a} o resultado dos seus trabalhos.

A commissão, não desejando cançar a attenção de v. ex.^{a} com a numeração das vantagens que para a cidade do Porto e provincias do Norte resultam do acabamento do edificio, em que hoje se acha a Academia Polytechnica, e confiando além d'isso no provado e esclarecido patriotismo de v. ex.^{a}, limita-se n'este relatorio a desenvolver os pontos, que, pela supracitada portaria, foram submettidos ao seu exame.

N'este presupposto, a mais importante questão que se offerece é saber quaes os estabelecimentos scientificos e litterarios que no edificio se podem accommodar, tendo na devida consideração a distribuição e numero das aulas, officinas, e gabinetes indispensaveis para o ensino das sciencias varias, que nos ditos estabelecimentos se professam.

A commissão, tendo em vista não as necessidades actuaes dos estabelecimentos, taes como elles hoje se acham imperfeitos e incompletos, mas as necessidades futuras, quando o ensino fôr devidamente organisado, como pedem as necessidades da epocha, julga que no edificio chamado da Graça, depois de completo, segundo as plantas e alçados, que fazem parte d'este relatorio, se podem accomodar ampla e convenientemente, com grande vantagem para o ensino e para o publico, quatro dos estabelecimentos scientificos e litterarios da cidade do Porto, a saber: a Academia Polytechnica, a Escóla industrial, a Academia portuense de bellas artes, e a Bibliotheca publica.

O mais importante d'estes estabelecimentos pela sua origem, pelos fins para que foi creado, e pelos uteis resultados que já tem fornecido no espaço de sessenta annos de existencia, é, sem duvida alguma, a Academia Polytechnica do Porto, filha e herdeira da antiga Academia de commercio e marinha, creada por alvará de nove de janeiro de mil oitocentos e tres.

Sem insistirmos agora, por não ser nosso intento provar o que está de mais provado nas vantagens e fructos d'esta escóla, bastará para o nosso fim fazer saber a v. ex.ª que são urgentissimas as obras projectadas em relação ás necessidades d'esta academia.

Mesmo no estado de limitação em que se acha actualmente o ensino, por faltarem muitas cadeiras necessarias, e os indispensaveis gabinetes de physica e de historia natural, mesmo n'este estado de pobreza, dizemos, a academia lucta constantemente contra a falta de espaço tão necessario para poder funccionar regularmente.

As salas de aula são em tão pequeno numero, que se torna muito difficil a combinação das horas para harmonisar as lições dos differentes cursos; a sala, chamada dos exames, e que serve para as sessões solemnes da academia, como são a abertura dos cursos, a distribuição dos premios, e os concursos publicos para o provimento das cadeiras, é nos termos ordinarios, dividida em duas por um tapamento de lona a fim de augmentar o indispensavel numero das aulas; a secretaria está, por assim dizer, n'um corredor de passagem, com grave prejuizo dos trabalhos d'esta repartição; a bibliotheca é o logar unico, mas improprio, onde se reunem os lentes emquanto esperam as horas das aulas, ou quando não sahem logo que ellas terminam; e os poucos instrumentos de physica e objectos de historia natural, que possue a academia, acham-se amontoados em pequenas estantes. E' escusado dizer mais, para demonstrar a v. ex.ª a urgencia da obra, concluida a qual, como se vê das plantas e competente explicação d'ellas, ficará a Academia Polytechnica com a indispensavel largueza para as aulas, gabinetes, e officinas.

A escóla industrial do Porto, creada por decreto de trinta de dezembro de mil oitocentos e cincoenta e dois, funcciona, desde a sua origem, no mesmo edificio da Academia Polytechnica; mas lucta, como esta, com as mesmas difficuldades por falta d'espaço.

A commissão tambem a considerou no seu completo para a distribuição da parte que lhe é destinada, e v. ex.ª verá pela planta e competente explicação, que se lhe não deu de mais senão o necessario, sendo communs para a Academia Polytechnica e escóla industrial a aula e laboratorio de chimica, o gabinete do preparador, a aula e gabinete de physica, e o gabinete das machinas, communidade esta, de que resulta grande economia para a fazenda, e vantagem para o ensino.

A conveniencia de ficarem no mesmo edificio de portas a dentro os dois estabelecimentos de que temos fallado, é tão clara e obvia, que não precisa demonstração.

São complementares um do outro, tendo além d'isso muitas aulas communs.

A academia portuense de bellas artes, que a commissão propõe para funccionar no mesmo edificio, é tambem por assim dizer complementar da Academia Polytechnica.

Os alumnos que se destinam a certos cursos n'esta escóla, vão estudar na Academia de bellas artes o desenho de ornato, o de architectura, e o das cartas hydrographicas, por onde se vê qual será a vantagem de reunir estas aulas no mesmo edificio.

Além d'isso a localidade actual da academia de bellas artes (em S. Lazaro) é tão fóra do centro da cidade, e fica tão longe das outras escólas, que os alumnos gastam um tempo precioso nas idas e voltas, que poderiam facilmente aproveitar em outras occupações.

São estas, em resumo, as razões que moveram a commissão a incluir na repartição do projectado edificio a academia portuense de bellas artes.

Resta fallar da bibliotheca publica. A bibliotheca publica da cidade do Porto, e a cargo da sua municipalidade, é incontestavelmente um rico e utilissimo estabelecimento, mas no actual edificio de S. Lazaro, collocado n'um extremo da cidade, fica tão longe e tão á desamão, que só póde ser frequentado por grande necessidade de consultar livros, e não com aquella assiduidade que convinha para popularisar convenientemente a instrucção.

E se estes inconvenientes se fazem sentir para todos, e são communs a todas as classes de leitores, muito mais sensiveis se tornam para os estudantes que frequentam as aulas, a quem não sobeja tanto tempo das obrigações diarias, que possam, sem inconveniente, dispôr de algumas horas para irem a um arrabalde da cidade frequentar a bibliotheca publica.

Pelo contrario, sendo mudada a bibliotheca para o edificio da Graça, fica a leitura commoda, e ao alcance de todos, aos particulares no centro da cidade, e aos lentes e estudantes de todas as escólas, ou em casa ao pé da porta, por isso que a escóla medico-cirurgica é na mesma praça da Cordoaria, em que existe o edificio da Graça.

Mas além d'estas razões ha outras pelas quaes a commissão julgou dever propôr a mudança da bibliotheca publica.

Por muito cuidado que tenha tido a camara, como effectivamente tem tido, na collocação, arranjo, e augmento da sua bibliotheca, a actual casa resente-se do primitivo fim para que foi destinada, de tal sorte que nem as salas da livraria teem a construcção propria em relação ao arranjo e luz, nem o numero d'ellas é sufficiente para conter em ordem o crescido numero de livros, que a bibliotheca possue, sendo certo que muitos milhares d'elles estão em monte á espera de estantes onde sejam collocados.

A estes motivos accresce ainda um outro, no entender da commissão, muito attendivel, e é que tirados que sejam do edificio de S. Lazaro a academia de bellas artes e a bibliotheca, fica disponivel para o estado um magnifico terreno, que junto com o edificio, na opinião dos entendidos, póde valer para cima de oitenta contos de reis.

Por todas estas razões a commissão julga muito vantajosa a mudança da bibliotheca para o novo edificio, no qual lhe destina, como se vê das plantas e synopse explicativa, optimas accommodações construidas segundo as melhores condições, e muito proprias para o fim a que são destinadas.

Satisfeito este primeiro ponto, e demonstrada a vantagem de ficarem no mesmo edificio os quatro estabelecimentos de que temos tratado, julga a commissão dever amiudar algumas considerações a respeito da execução da obra e submettel-as á consideração de v. ex.ª

A remoção do collegio dos meninos orphãos, que actualmente habitam no andar superior do edificio da Graça, é a primeira condição para se concluirem as obras, e se levar ávante o projecto que a commissão tem a honra de pôr nas mãos de v. ex.ª

O terreno sobre o qual se começou a levantar em 1803 o actual edificio da Academia Polytechnica (então da marinha e commercio) pertencia aos meninos orphãos, que n'aquelle tempo habitavam uma casa existente no dito terreno, e cujos restos ainda se veem em parte.

Esse edificio, uma igreja que ainda funcciona servida pelos ecclesiasticos, que dirigem o collegio, e um grupo de pequenas casas, cujo aluguel constituia a renda dos meninos orphãos, eram toda a sua propriedade, fundada com esmolas, e devida á beneficencia de almas caritativas.

Mandando o senhor D. João VI, então principe regente, proceder á edificação do actual edificio, para o que se levantou um imposto especial na cidade do Porto, ordenou que em compensação da perda da sua propriedade, os meninos orphãos tivessem dentro do novo edificio habitação propria e commoda, que em logar da antiga igreja se edificasse uma nova, e que, para indemnisar o collegio das rendas que perdia, se alugassem os baixos do edificio, e o producto d'elles fosse usufruido pelos meninos orphãos.

Assim se fez. Como, porém, por occasião da nova organisação politica do paiz, ficassem suspensas as obras, e o tributo especial lançado á cidade tenha acabado, ou se ache confundido com as demais rendas do estado, os meninos orphãos continuaram a habitar parte do antigo collegio, ainda não destruida, utilisando-se d'alguns quartos do novo edificio; a igreja é a antiga, por se não ter feito a nova, e como indemnisação das casas destruidas recebe o collegio as rendas dos baixos da parte feita do novo edificio. Esta renda, segundo uma nota official mandada a esta commissão pela camara municipal, actual superintendente do collegio, monta á quantia de 1:563$000 reis.

A' vista d'isto a commissão, para proceder legalmente e com justiça, officiou á camara municipal para que esta corporação informasse o que lhe occorresse a respeito da transferencia do collegio dos meninos orphãos, a fim de se completar o edificio, e destinal-o para os quatro estabelecimentos de que acima se falla.

A camara em 22 de janeiro do anno passado respondeu que só consentiria na demolição da igreja com a condição de se transferir provisoriamente o collegio para o convento do Carmo, devendo tambem no novo projecto do edificio darem-se as accommodações necessarias para se estabelecer alli definitivamente o mesmo collegio.

A commissão tendo na devida conta os interesses dos meninos orphãos, mas vendo a impossibilidade de condescender com a camara, por isso que de nenhuma sorte o collegio póde continuar a existir dentro do novo edificio, não só porque no plano d'elle é eliminada a igreja, mas tambem porque a coexistencia do collegio e dos outros estabelecimentos no mesmo local se torna impossivel, attendendo á falta d'espaço, e a motivos bem obvios de disciplina e administração, vê só um meio de sair da difficuldade, e é a remoção do collegio, sendo este indemnisado da casa, das rendas, e da igreja que perde.

Em quanto á casa e igreja a commissão concorda inteiramente com a camara de que a melhor e mais apropriada ao intento, e talvez a unica, é o convento do Carmo, actual quartel da guarda municipal.

Casa ampla e bem situada, igreja magnifica, terreiro sufficiente para recreio, proximidade das aulas publicas de todos os graus, são condições que muito devem influir para ser este o local escolhido.

Em quanto á guarda municipal poderá esta ser dividida em estações, organisação muito mais accommodada ao serviço, ou poderá ser transferida para outro quartel que o governo lhe destinar.

Pelo que diz respeito ás rendas que o collegio dos orphãos aufere pelo aluguel dos baixos do edificio da academia, a commissão é de parecer e propõe que aquelle estabelecimento seja indemnisado em inscripções de capital correspondente á renda actual, visto que nenhuma parte do novo edificio deve continuar a ser alugada a particulares.

Com effeito, continuando este mau uso de alugar os baixos do edificio, não só se torna impossivel a realisação do plano que esta commissão tem a honra de levar ao conhecimento de v. ex.ª, porque esses baixos são destinados para officinas e arrecadações das duas escólas industrial e polytechnica, mas ainda porque é muito pouco conveniente que em um edificio destinado á instrucção se entre pela mesma porta para as aulas e para as tabernas.

As razões expendidas parecem á commissão tão fortes e tão claras, que seria duvidar da boa vontade e patriotismo de v. ex.ª insistir n'ellas por mais tempo.

Resta fallar das expropriações e orçamento.

Em quanto ás expropriações a commissão tem a honra de remetter a v. ex.ª um mappa feito e assignado pela junta das obras da camara municipal, e por elle verá v. ex.ª que o valor das casas a expropriar não excede a quantia de trinta e quatro contos, nove centos e quatro mil reis; e ainda a esta quantia ha a abater dois contos trezentos e setenta mil reis d'uma casa, que valendo hoje dois contos oitocentos e oitenta mil reis foi reedificada debaixo da condição que a todo o tempo seria apropriada pelo valor primitivo de quinhentos e dez mil reis.

Em quanto ao orçamento da obra, que a commissão confeccionou com toda a possivel individuação, como se vê dos respectivos mappas que fazem parte d'este relatorio, talvez á primeira vista pareça excessivo; mas se se attender ao magnifico edificio com que fica dotada a cidade do Porto, e as vantagens que para o publico ensino resultam d'uma casa propria e accommodada para os quatro grandes estabelecimentos de instrucção, de que fallamos no principio, julgar-se-ha pequeno o sacrificio.

A commissão abstendo-se de fallar mais miudamente a este respeito, porque não faria mais do que repetir o que se acha amplamente indicado na synopse, mappas, e plantas juntas, julga ter satisfeito ao que lhe foi ordenado na supracitada portaria de trinta e um de dezembro de mil oitocentos e sessenta.

Porto e sala das sessões da commissão em vinte e seis de janeiro de mil oitocentos e sessenta e tres. — Miguel do Canto e Castro, João Baptista Ribeiro, director da Academia Polytechnica, José de Parada e Silva Leitão, lente da Academia Polytechnica, e director interino da escóla industrial; Luiz Victor Silves, director das obras publicas, Antonio Luiz Ferreira Girão, lente da Academia Polytechnica do Porto.

Está conforme. — Secretaria d'estado dos negocios do reino em 16 de maio de 1864. — *José Eduardo Magalhães Coutinho.*

SYNOPSE EXPLICATIVA DO PROJECTO DE EDIFICIO PARA O PAÇO DOS ESTUDOS NO PORTO

O edificio da Graça, onde se acham incommodamente estabelecidas a Academia Polytechnica, a Escóla industrial, e o Real collegio dos meninos orphãos, póde depois de concluido accommodar convenientemente os dois mencionados estabelecimentos scientificos, bem assim a Academia portuense de bellas artes e a Bibliotheca publica.

O projecto para este fim apresentado distribue do seguinte modo por estes quatro estabelecimentos todo o espaço de que é possivel dispôr.

BIBLIOTHECA PUBLICA

Na parte central do edificio, e para o lado do sul, um vestibulo de sessenta e tres metros e setenta centimetros quadrados de superficie, com portas e janellas envidraçadas, dará entrada em um salão de quarenta e dois metros e noventa centimetros de comprimento, treze metros e sessenta centimetros de largura, e dezeseis metros e oitenta e cinco centimetros d'altura (quasi a total do edificio), guarnecido com duas galerias niveladas com os pavimentos dos dois andares do edificio, e allumiado por dois grandes zimborios, e por dezesete janellas e dez portas.

O serviço do salão e das galerias far-se-ha por meio da escada circular e dos corredores marcados nas plantas.

Em um dos corpos lateraes do edificio, e no pavimento terreo, foram estabelecidos gabinetes para os dois bibliothecarios, a secretaria da bibliotheca, um quarto para o porteiro, outro para arrecadação, e uma sala de vinte e tres metros e trinta e cinco centimetros de comprimento, seis metros e sessenta e cinco centimetros de largura, e sete metros d'altura, guarnecida com uma galeria ao nivel do pavimento dos sotãos, e destinada para arrecadar manuscriptos.

Os sotãos correspondentes á secretaria, e as outras salas mencionadas devem servir para n'elles se estabelecerem officinas de encadernador, de typographo e lythographo. Estas officinas são servidas por uma escada inteiramente independente da escada de serviço da bibliotheca, e por uma porta tambem independente da entrada do salão, e que é além d'isso destinada para entrada particular dos empregados.

Um corredor particular estabelece communicação entre a bibliotheca publica e a escada da academia portuense de bellas artes, a qual foi tambem projectada para o serviço do museu portuense, actualmente estabelecido no convento de Santo Antonio da cidade, mas que deve juntamente com a bibliotheca ser transferido para o paço dos estudos.

ACADEMIA PORTUENSE DE BELLAS ARTES

Ao meio do quarteirão occidental do edificio, e no pavimento terreo um vestibulo dá entrada para a aula de esculptura (sala de cento e vinte e cinco metros e cinco decimetros quadrados de superficie) e para a escada que conduz aos andares superiores.

No primeiro andar uma sala de quarenta e nove metros e oito decimetros de comprimento, e seis metros e sessenta e cinco centimetros de largura é destinada para galeria de pinturas. Esta sala communica por um lado com o museu (o qual tem vinte metros e cincoenta e cinco centimetros de comprimento, e onze metros e quatro decimetros de largura) e pelo outro lado com um salão onde devem reunir-se os museus de historia natural pertencentes ao municipio e a Academia Polytechnica do Porto.

Tem além d'isto a Academia de bellas artes n'este primeiro andar um quarto para lavatorio, e outro para arrecadação.

No segundo andar tem igualmente dois quartos para arrecadação e lavatorio; uma aula de pintura de vinte e tres metros e quinze centimetros de comprimento, e seis metros e sessenta e cinco centimetros do largura, e mais cinco espaçosas salas, sendo uma para secretaria, outra para as reuniões do conselho da academia, e as tres restantes para aulas de architectura, desenho e gravura.

As salas de aula receberão luz das janellas correspondentes, e de zimborios praticados no tecto do edificio.

Os corredores marcados nas plantas servem ao uso independente d'estas differentes salas.

ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO

Todo o quarteirão voltado ao norte (fachada principal), bem como uma parte dos quarteirões oriental e occidental, do edificio serão occupados pela Academia Polytechnica do Porto.

Projectou-se para este estabelecimento no pavimento terreo um espaço de dezenove metros e setenta e cinco centimetros de comprimento, de nove metros e vinte e cinco centimetros de largura, e de toda a altura do edificio, para alojar o navio que serve á explicação das lições de manobra; uma sala de espera, outra para secretaria, outra para as reuniões do conselho da academia, um gabinete para o director, uma sala para archivos, outra para o guarda-mór, uma officina metallurgica, e dois quartos, sendo um para os guardas, e outro para arrecadação.

Quatro salas mais completam as accommodações da academia no pavimento terreo do edificio.

Estas salas, que devem igualmente servir á escóla industrial, são destinadas para aula e laboratorio de chimica, e para gabinetes do lente respectivo e guarda preparador.

A aula de chimica tem dezoito metros e quarenta centimetros de comprimento, e oito metros e quarenta e cinco centimetros de largura, e o laboratorio tem quinze metros e cincoenta e cinco centimetros de comprimento, e seis metros e cincoenta centimetros de largura.

Os sotãos correspondentes a estas ultimas quatro salas, exceptuando a do laboratorio chimico (cuja altura deverá comprehender a dos sotãos), devem ser utilisados para deposito de utensilios, drogas, e machinas, e para n'elles se estabelecer uma pequena officina para a escóla industrial.

Com o deposito de utensilios communicar-se-ha por meio d'uma escada, especialmente construida para esse fim, e os outros sotãos pertencentes á Academia Polytechnica serão servidos pelas duas escadas marcadas nas plantas.

Uma arcada, fechada com gradaria de ferro de quatro metros e vinte e cinco centimetros de largura, e de todo o comprimento do quarteirão voltado ao norte, dá entrada para as salas mencionadas, e para um vestibulo de oitenta e um metros e dez centimetros quadrados de superficie, que conduz á grande escada destinada para o serviço do primeiro andar do edificio.

N'este primeiro andar projectou-se para a Academia Polytechnica um salão nobre de quatorze metros e quinze centimetros de comprimento, e onze metros e quinze centimetros de largura, para servir exclusivamente para festas nacionaes e academicas; uma sala para actos de vinte e um metros e setenta e cinco centimetros de comprimento, e onze metros de largura; outra de eguaes dimensões para o desenho; um gabinete de leitura; uma sala para a aula de physica, tendo de comprimento dezoito metros e quarenta e cinco centimetros, e de largura oito metros e quarenta e cinco centimetros; outra para gabinete de physica tendo de comprimento trinta metros e oitenta centimetros, e de largura seis metros e sessenta centimetros (estas duas salas pertencerão tambem á escóla industrial), e uma sala de mais de dezoito metros e quinze centimetros de comprimento, onze metros e vinte e cinco centimetros de largura, e nove metros e quarenta e cinco centimetros de altura, e guarnecida com uma galeria ao nivel do pavimento do segundo andar do edificio, e destinada para muzeu de historia natural.

Um espaçoso corredor serve, como se vê da planta respectiva, á independencia d'estas differentes salas.

Uma escada especial conduz ao segundo andar, onde a academia tem uma sala para as aulas de construcções e de mechanica; outra de doze metros e dezenove centimetros de comprimento, e onze metros e cinco centimetros de largura para a de geometria descriptiva; uma terceira para o primeiro anno mathematico e commercio, outra para o segundo anno de mathematica e economia politica, e, junto á galeria do muzeu de historia natural outra sala para as aulas de zoologia e botanica.

O corredor que dá serventia a estas salas conduz tambem ao muzeu industrial, e ao gabinete de machinas pertencentes á escóla industrial, e dos quaes a academia deve tambem poder servir-se.

Uma escada especial leva ao observatorio e á aula e gabinete de astronomia estabelecidos no andar inferior ao observatorio.

ESCÓLA INDUSTRIAL DO PORTO

Fica occupando parte do quarteirão voltado ao sul, e a maior parte do quarteirão oriental. A entrada da escóla será pelo lado do sul.

Um vestibulo conduz ao corredor que dá commmunicação para quatro salas occupadas pela aula e laboratorio de chimica e suas pertenças, e para quatro officinas estabelecidas no pavimento terreo, as quaes poderão communicar tambem com o exterior do edificio por uma porta particular voltada ao nascente.

Uma escada construida dentro d'umas das officinas dará serventia para os sotãos, onde deve ser estabelecido o resto das officinas e a habitação do guarda.

Além das accommodações mencionadas, tem tambem a escóla, no pavimento terreo, dois quartos para a arrecadação e carvoeira, e outro para o contador do gaz e para o porteiro.

No primeiro andar tem a escóla, além das duas salas destinadas para aula e gabinete de physica, mais seis grandes salas, sendo uma para aula de geometria, outra para aula d'instrucção primaria, outra para aula de economia industrial, e as tres restantes para secretaria, gabinete do director, e sala dos conselhos da escóla.

No segundo andar tem cinco salas, que são destinadas para museu industrial, gabinete de machinas, aula de desenho de machinas, e geometria descriptiva, aula de mecanica industrial, aula de desenho de ornato; e tem além d'estas uma outra sala para o estudo do gesso e modelação, e um quarto para os guardas.

O museu industrial tem trinta metros e oitenta centimetros de comprimento, e seis metros e sessenta centimetros de largura; o gabinete de machinas tem de comprido dezesete metros e trinta e cinco centimetros, e de largo sete metros e trinta centimetros; e a aula de desenho de machinas tem vinte e seis metros e setenta e cinco centimetros de comprimento, e oito metros e quarenta e cinco centimetros de largura; e a aula de desenho de ornato tem vinte metros e cincoenta centimetros de comprimento, e sete metros e vinte e cinco centimetros de largura.

O vão do pateo interior, que vai marcado nas plantas (pateo de quatrocentos e treze metros e vinte e cinco centimetros quadrados de superficie), allumia as salas do edificio, que pela sua collocação não podem receber a luz das janellas e das portas praticadas nas quatro paredes principaes do edificio. No centro d'este pateo haverá uma fonte para o serviço dos quatro estabelecimentos que o edificio tem de accommodar.

Está conforme.—Secretaria de estado dos negocios do reino, em 16 de maio de 1864.—*José Eduardo Magalhães Coutinho.*

Valor dos predios situados entre o passeio da Graça e a travessa do Carmo, que tem de ser demolidos com a conclusão do edificio da Academia Polytechnica, avaliados como allodiaes . . . . 34:904$000 reis
Total do orçamento . . . . . . 234:929$550 reis

Está conforme.—Secretaria de estado dos negocios do reino em 16 de maio de 1864.—*José Eduardo Magalhães Coutinho.*

Projecto de lei apresentado pelo conselheiro Adriano Machado á camara dos snrs. deputados na sessão de 15 de março de 1879

Senhores.—O projecto das obras dos paços dos estudos do Porto exige a expropriação das lojas situadas nos baixos do antigo edificio da Academia da marinha e commercio da cidade do Porto, que andam arrendadas em proveito dos orphãos do collegio de Nossa Senhora da Graça, das quaes a camara municipal da mesma cidade é administradora.

O projecto de lei que tenho a honra de submetter á vossa approvação, tem por fim principal habilitar o governo a realisar a expropriação d'aquellas lojas, conforme lhe permittir a verba auctorisada para aquellas obras, emquanto se não promulga uma lei com bases mais largas para a conclusão do edificio.

A dotação da Academia para premios de estudantes, despezas de expediente, bibliotheca, jardim botanico, museus de mineralogia e zoologia, laboratorio chimico, compras de instrumentos de astronomia, e de modelos para o ensino da geometria descriptiva e mechanica applicada, não passa de 1:730$000 reis!

Tendo, como tenho, por angustiosa a situação da fazenda publica, não ouso propôr o augmento d'esta verba até á cifra que seria rasoavel para o provimento de tantos e tão importantes estabelecimentos. Mas peço, visto que não vai n'isso augmento algum de despeza, que da verba de 4:000$000 reis, votada para as obras da Academia Polytechnica no exercicio corrente, seja destinada a quantia de 1:000$000 reis para a compra de apparelhos e utensilios do laboratorio chimico.

Uma relação, annexa a este projecto de lei, dos objectos indispensaveis áquelle estabelecimento, justifica esta providencia.

Parece-me, pois, que será digno da vossa approvação o seguinte:

PROJECTO DE LEI

Artigo 1.º—É o governo auctorisado para contractar com a camara municipal do Porto, a expropriação das lojas existentes nos baixos do edificio da Academia Polytechnica.

§ 1.º—As expropriações serão pagas em inscripções da divida publica de 3 por cento, de rendimento egual ao das lojas que forem expropriadas.

§ 2.º—As inscripções serão compradas com o dinheiro votado annualmente para as obras da Academia Polytechnica.

Art. 2.º—Da verba votada para as obras da Academia Polytechnica do Porto, no exercicio de 1878-1879, será applicada até á quantia de 1:000$000 reis para a compra e collocação de apparelhos e utensilios destinados ao laboratorio de chimica da dita Academia.

§ unico.—A importação dos alludidos apparelhos e utensilios será livre de direitos e emolumentos na Alfandega do Porto.

Art. 3.º—Fica revogada a legislação em contrario.

Sala das sessões da camara dos senhores deputados, 15 de março de 1879.—*Adriano Machado.*

Apparelhos e utensilios de chimica a que se refere o presente projecto de lei

I

OBJECTOS DEVENDO SER COMPRADOS NA ALLEMANHA

		Mk. Pf.
1456	Balança de analyse podendo pesar 1 kilogramma, sensivel a 0gr.,001 ...	370—80
1456	Balança podendo pesar 500 grammas, sensivel a 0gr.,0005.........	315—00
552	Collecção de areometros do dr. Geissler, dando os pesos especificos de 0gr.,700 a 1gr.,850.............	75—00
363	Apparelho para a decomposição electrolytica do acido chlorhydrico, da agua e do ammoniaco...........	12—50
364	Apparelho para determinar a quantidade de hydrogenio contido n'um volume de acido chlorhydrico.....	15—50
365	Apparelho para provar que um volu-	

		Mk. Pf.
	me de chloro e um volume de hydrogenio dão dois volumes de acido chlorhydrico....................	17—50
367	Apparelho para provar que a agua se compõe de dois volumes de hydrogenio e um de oxygenio.........	32—50
368	Apparelho para demonstrar que dois volumes de agua gazosa se formam de dois volumes de hydrogenio e um de oxygenio medidos a 100°......	852—00
369	Apparelho para demonstrar que o ammoniaco se compõe de tres volumes de hydrogenio e um de azote.	16—50
370	Apparelho para demonstrar que da combinação de tres volumes de hydrogenio com um de azote resultam dois volumes de ammoniaco......	16—50
371	Apparelho para a decomposição electrolytica simultanea da agua, do acido chlorydrico e do ammoniaco..	33—00
372	Apparelho para provar que a composição do acido chlorydrico não soffre mudança......................	15—00
373	Apparelho para provar que o oxygenio e o hydrogenio se combinam na proporção dada pela agua........	22—50
374	Apparelho para provar que um volume de gaz dos pantanos contém dois volumes de hydrogenio..........	17—00
377	Apparelho para demonstrar as bases physicas da hypothese de Avogrado e Ampère....................	230—00
378	Apparelho para provar que a com-	

		Mk. Pf.
	bustão dos solidos no ar produz augmento de peso..................	35- 00
382	Apparelho para mostrar os phenomenos da combustão..............	20—00
384	Apparelho para medir a densidade dos vapores.....................	171—00
381	Apparelho para demonstrar a igualdade de volume do oxygenio e do anhydrido carbonico e sulfuroso formados por elle..................	24—00
383	Apparelhos para as experiencias com o acido sulfuroso liquido.........	15—00
375	Apparelho para decompor o acido azotico pelo calor...............	15—55
330-331	Apparelho de Bunzen para determinar as leis da absorpção dos gazes nos liquidos.....................	152—00
332	Apparelho para medir a densidade dos vapores produzidos pela combustão no eudiometro...............	28—00
333	Apparelho para a diffusão........	12—00
349	Gazometro de mercurio..........	5—50
352	Cuva de mercurio com supporte para eudiometro.....................	17—00
353	Apparelho para medir a densidade dos gazes pela velocidade do seu escoamento......................	45—00
355 e 357	Apparelho para medir o volume dos gazes.........................	14—00
344	Apparelho para limpar os tubos de vidro..........................	1—25
358	Apparelho para produzir o gaz oxhydrogenio......................	16—00

		Mk. Pf.
145	Cinco apparelhos de Fresenius para doseamento do chloro	12—00
143	Apparelho para conservar o chloro .	22—00
657-658	Uma collecção de modelos de madeira para o estudo da crystalographia chimica (dr. Kekulé)	150—00
75	Uma collecção de alcaloides.......	120—00
(a)	Um apparelho de distillação	
	Somma (excepto o artigo *a*).	2315—30

II

OBJECTOS DEVENDO VIR DE FRANÇA

		Francos
	Um calorimetro de Berthelot completo	470
	Um apparelho de Berthelot para determinar os pontos de ebulição	18
	Apparelho de Berthelot para medir o calor especifico dos liquidos.......	12
	Idem para medir o calor da vaporisação dos liquidos	12
	Idem para a decomposição do acido formico	12
	Idem para produzir o ozono	5
	Idem para a synthese da benzina. .	2
326	Apparelho de Sainte Claire Deville e Troost para determinar a densidade dos vapores	30
343	Idem de Sainte Claire Deville para o estudo da chamma	15
599	Idem para a producção do hydrogenio	70

		Francos
340 bis	Quatro tubos para repetir as experiencias da dissociação da agua....	10
341	Apparelho para a dissociação do oxydo de carbone..................	10
424	Idem para purificar o mercurio....	10
1311 bis	Apparelho de Dumas para a synthese da agua......................	60
1311	Apparelho de Dumas e Boussingault para a analyse do ar	60
1347	Apparelho de Mohr para doseamento do gaz carbonico nas aguas mineraes	55
	Pipeta de Mohr para tirar a agua das fontes mineraes................	5
5	Apparelho de Laurent para o tratamento dos silicatos pelo acido fluorhydrico	18
594	Apparelho para a producção do oxygenio pelo chlorato de potassio.....	70
1320	Tubo de Houzeau para produzir ozono	5
	Torno de copellação, de gaz	50
	Apparelho de Schilling para determinar o peso especifico dos gazes.....	72
	Somma.......	1074

Os preços dos objectos vindos da Allemanha são os indicados no catalogo da casa C. Gerhardt, de Bonn. Os dos objectos vindos de França são os da casa Alvergniat.

PROPOSTA

Renovo a iniciativa do projecto de lei, apresentado em 15 de Março de 1879 pelo deputado por um dos circulos do Porto, Adriano Machado, em relação á verba de 4:000$000 reis, votada no orçamento para as obras da Academia Polytechnica.

Lisboa, 13 de Abril de 1880.—*Antonio Pinto Magalhães Aguiar.*

PARECER N.º 185

Senhores.—A' vossa commissão de obras publicas foi remettida a proposta de lei apresentada em 15 de Março de 18~~8~~9 pelo snr. deputado Adriano Machado, havendo sido renovada a iniciativa da mesma proposta, na presente sessão, pelo snr. deputado Magalhães Aguiar.

7/

Considerando:

Que está consignada no orçamento do estado a verba de 4:000$000 reis, para as obras dos Paços dos Estudos no Porto, e que taes obras não podem progredir convenientemente sem que sejam expropriadas as lojas situadas nos baixos do antigo edificio da Academia de Marinha e Commercio;

Que é indispensavel a continuação das obras para que ali se possam accommodar diversos estabelecimentos scientificos da mesma cidade;

Que as lojas do edificio referido andam arrendadas em beneficio dos meninos orphãos do collegio de Nossa Senhora da Graça, sendo administradora a Camara municipal;

Que ao laboratorio chimico da Academia Polytechnica pertence annualmente uma exigua verba, em virtude de

*

ser pequenissima a dotação consignada no orçamento para todos os estabelecimentos da mesma academia, d'onde resulta achar-se aquelle laboratorio longe de poder satisfazer ás necessidades do ensino;

E' a vossa commissão, d'accordo com o governo, e ouvida a illustre commissão de fazenda, de opinião que seja convertida a proposta no seguinte:

PROJECTO DE LEI

Artigo 1.º—Fica o governo auctorisado a contratar com a Camara municipal do Porto a expropriação das lojas existentes nos baixos da Academia Polytechnica.

§ 1.º—As expropriações serão pagas em inscripções da divida publica de 3 por cento do rendimento equivalentes ao das lojas expropriadas.

§ 2.º—As inscripções serão compradas pela verba votada annualmente para as obras da Academia Polytechnica.

Art. 2.º—Da verba votada para as obras da Academia Polytechnica do Porto no exercicio de 1879-1880 será applicada até á quantia de 1:000$000 reis para a compra e collocação de apparelhos e utensilios destinados ao laboratorio de chimica da dita Academia.

§ unico—A importação dos alludidos apparelhos e utensilios será livre de direitos e emolumentos na alfandega do Porto.

Art. 3.º—Fica revogada a legislação em contrario.

Sala da commissão, em 3 de Maio de 1880.

João Candido de Moraes—*Pinheiro Borges*—*Elvino de Brito*—*Antonio José d'Avila*—*J. Bandeira Coelho*—*A. L. Guimarães Pedrosa*—*Goes Pinto*, relator.

Senhores.—A vossa commissão de fazenda examinou com a devida attenção o projecto de lei, n.º 84-V, da iniciativa do snr. deputado Adriano Machado, renovado n'esta sessão pelo snr. deputado Magalhães Aguiar com o n.º 163-D.

Considerando que da approvação do referido projecto não provém augmento de despeza e unicamente a applicação conveniente e util de uma verba do orçamento;

E' a nossa commissão de parecer que seja approvado o referido projecto com a seguinte substituição ao artigo 2.º: 1879-1880 em vez de 1878-1879.

Mariano de Carvalho—Manoel Pereira Dias—Antonio Candido—Pereira de Miranda—Francisco Beirão—Antonio Ennes—Joaquim Valle—A. Fonseca—Joaquim de Vasconcellos Gusmão, relator.

Unico documento que existe na Secretaria da Junta Inspectora da Academia a respeito do Director da Aula de Desenho

Senhor—A Junta d'Administração da Companhia Geral d'Agricultura dos Vinhos do Alto Douro Inspectora da R. A., munida com a benigna permissão que lhe concede o § 50 dos Estatutos da mesma R. A., tem a honra de propor a Vossa Alteza Real para Director da Aula do Desenho, e Pintura da mesma R. A. a Domingos de Sequeira, cujo Lugar se acha vago por fallecimento de Francisco Vieira, por se persuadir que elle terá todas as qualidades necessarias para n'este principio dar ao dito Estabelecimento o methodo, e boa ordem necessaria afim de progredir com lustre e utilidade publica, mediante a sua assistencia na referida Aula, ao menos pelo tempo de tres mezes cada anno, para poder vencer o ordenado, como era obrigado o dito Francisco Vieira, para lhe promover os beneficios que elle estava obrigado de lhe procurar, e que não se poderão verificar pelo seu fallecimento.

Parece á Junta que o referido Domingos de Sequeira, mediante a sua assistencia, merece que V. A. R. seja servido nomeal-o para occupar o Emprego de Director d'Aula do Desenho na R. A. d'esta cidade do Porto.

V. A. R., porém, Determinará o que for mais do seu R. Agrado. Porto em Junta de 7 de Janeiro de 1806—*P. Gaspar Cardoso de Carvalho Fonseca—Domingos Martins Gonçalves—Christovão Guerner—Antonio de Mello Correia—José Monteiro de Carvalho—Martim Affonso Borne—José Antonio Taveira de Magalhães—José de Souza Mello.*

PROGRAMMAS

PROGRAMMAS

I Cadeira — Algebra superior e geometria analytica

Lente *L. I. Wodhouse*. Seis horas semanaes

ALGEBRA

I

1. *Determinantes*. — Noções preliminares. Disposição par, disposição impar. Permutação de dous elementos. Permutação circular. Definição do determinante. Notação. Ordem do determinante. Termo principal. Propriedades geraes dos determinantes. Determinantes menores. Desenvolvimento dos determinantes. Regra de Sarrus. Calculo dos determinantes. Resolução das equações do primeiro grau a muitas incognitas. Producto de dous determinantes.

2. *Generalisação da noção de quantidade*. — Propriedades combinatorias das operações de arithmetica. Numeros irracionaes. Introducção da ideia de direcção no symbolo representativo da grandeza. Quantidades geometricas. Módulo, argumento. Definição das operações geometricas. Verificação das propriedades combinatorias das operações da arithmetica. Quantidades imaginarias. Interpretação geometrica de $\sqrt{-1}$. Notação algebrica e trigonometrica das quantidades imaginarias. Operações sobre imaginarios. Formula de Moivre. Raizes da unidade.

3. *Series*. — Series convergentes e divergentes. Series de termos reaes. Regras de convergencia. — Series de termos imaginarios. Series absolutamente convergentes. Operações sobre series. Series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas da variavel. Circulo de convergencia. Series uniformemente convergentes.

4. *Productos infinitos*. — Condição de convergencia. Limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quando n cresce indefinidamente.

5. *Fracções continuas*. — Definição. Transformação de fracção em se-

rie. Estudo do caso em que os numeradores das integrantes são a unidade.

6. *Principios geraes da theoria das funcções.* — Continuidade e descontinuidade. Theoremas sobre continuidade. Funcções uniformes e multiformes.

Funcção algebrica inteira. — Formula de Taylor. Definição e formação das derivadas. Continuidade da funcção inteira. Decomposição (1) da funcção em factores lineares. Funcções racionaes fraccionarias. Sua decomposição.

Funcção exponencial. Sua periodicidade. A funcção exponencial é uniforme e continua em todo o plano. Funcção inversa ou logarithmica. Ramos da funcção. Continuidade.

Funcções circulares directas e inversas. Ramos e pontos criticos. Continuidade.

II

7. *Theoria geral das equações algebricas.* — Theoremas preliminares. A equação algebrica tem pelo menos uma raiz. Decomposição do seu primeiro membro em n factores lineares. A equação algebrica de grau n tem n raizes. Composição dos coefficientes. Divisores algebricos. Reducção da equação com raizes eguaes. Soluções communs a duas equações. Transformação das equações. Irreductibilidade.

8. *Separação das raizes das equações numericas.* — Resolução algebrica e numerica das equações. Limites dos módulos das raizes e limites das raizes reaes de uma equação de coefficientes reaes. Theoremas relativos á substituição da variavel por dois numeros e corollarios. Theorema sobre a mudança de signal de $\frac{F(z)}{F'(z)}$ quando $F(Z)$ passa por zero. Theorema de Rolle. Theorema de Sturm. Applicação ás condições de realidade das raizes de uma equação de grau dado.

Separação das raizes pelo theorema de Sturm.

Separação das raizes pelo methodo de Lagrange.

Theorema de Cauchy e separação das raizes imaginarias.

9. *Calculo das raizes.* — Raizes commensuraveis. Raizes incommensuraveis. Methodo de Newton e Fourier. Raizes imaginarias.

10. *Funcções symetricas.* — Eliminação.

11. *Resolução algebrica das equações.* — Equação do terceiro grau. Equação do quarto grau.

GEOMETRIA ANALYTICA

I

1. *Trigonometria espherica.* — Formulas fundamentaes. Resolução dos triangulos.

---

(1) A demonstração dá-se na theoria das equações.

II

2. *Ponto.* — Coordenadas cartesianas. Coordenadas polares. Distancia entre dois pontos. Transformação de coordenadas.

3. *Linha recta.* — Equação de uma linha. Equação da linha recta. A equação do primeiro grau representa uma recta. Differentes formas da equação da linha recta. Equação da recta que passa por dois pontos. Condição para que tres pontos estejam em linha recta. Angulo de duas rectas. Condição de parallelismo e de perpendicularidade. Intersecção de duas rectas. Condição para que tres rectas sejam concorrentes. Equação de uma recta que passa pela intersecção de outras duas. Distancia de um ponto a uma recta.

4. *Applicação do methodo de notação abreviada á linha recta.* — Da equação $\alpha - k\,\beta = 0$. Applicação do methodo á demonstração de theoremas e resolução de problemas. Relação harmonica e anharmonica. Systemas de rectas homographicas. Coordenadas trilineares. Coordenadas tangenciaes.

5. *Equações de grau superior ao primeiro representando rectas.* — Generalidade sobre equações que se decompõem em fractores. Rectas imaginarias.

6. *Circulo.* — Equação do circulo. Differentes fórmas. Circulo que passa por tres pontos. Equação do segundo grau que representa um circulo; determinação do raio e coordenadas do centro.

7. *Parabola.* — Definição e equação. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação em coordenadas polares.

8. *Ellipse.* — Definição e equação referida ao centro e eixos. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação da curva em coordenadas polares.

9. *Hyperbole.* — Definição e equação referida ao centro e eixos. Algumas propriedades. Transformação de coordenadas. Equação da curva em coordenadas polares.

10. *Definição d'estas curvas pela relação das distancias de seus pontos a uma recta e a um ponto.* — Equação geral.

11. *Tangentes.* — Tangentes em geral. Tangente e normal ao circulo. Tangentes por um ponto exterior. Corda de contactos.

Tangente e normal á parabola. Subtangente e subnormal. Differentes propriedades.

Tangente e normal á ellipse e hyperbole. Subtangente e subnormal Differentes propriedades.

12. *Cordas supplementares.*

13. *Asymptomas.*

14. *Centros e diametros.* — Centros e diametros na parabola, na ellipse e na hyperbole. Diametros conjugados.

15. *Discussão da equação geral do segundo grau.*

16. *Polos e polares.*

*

III

17. *Ponto, recta e plano.*—Coordenadas do ponto no espaço. Distancia entre dois pontos. Coordenadas polares de um ponto. Transformação de coordenadas. Superficies e linhas. Equações da recta e do plano. Problemas sobre a recta e o plano.

18. *Superficies cylindricas conicas e de revolução.*

19. *Discussão da equação do segundo grau.*

II Cadeira — Calculo differencial e integral; calculo das differenças e das variações

Lente *Dr. F. Gomes Teixeira.* Seis horas semanaes

Na exposição das doutrinas que são comprehendidas n'esta cadeira, o respectivo lente segue os **Fragmentos de um curso de analyse infinitesimal**, que são publicados n'este *Annuario*, e de que elle é auctor.

III Cadeira — **Mecanica racional e cinematica**

Lente *J. A. Albuquerque*. Seis horas semanaes

I — MECANICA RACIONAL

Noção de movimento e de força: objecto da mecanica; distincção entre mecanica racional e mecanica physica. Divisão da mecanica racional em Phoronomia, Estatica e Dynamica. Representação ideal dos corpos em mecanica racional: ponto material e systema material.

Caracter vectorial das grandezas em mecanica. Noções de geometria de systemas de vectores como propedeutica da mecanica moderna.

A. — PHORONOMIA

a) MOVIMENTO ABSOLUTO

1) Phoronomia do ponto material

Objecto da Phoronomia; correlação entre esta sciencia e a geometria. Movimento absoluto e relativo. A fluxão das grandezas: noção geral de velocidade.

Theoria da velocidade

Equação do movimento do ponto sobre a trajectoria. Movimento uniforme e variado, rectilineo e curvilineo. Velocidade linear. Representação graphica da lei do movimento: curva dos espaços e das velocidades. Importancia da representação graphica do movimento como methodo de investigação das leis naturaes.

Decomposição do movimento: a simultaneidade de movimentos como pura concepção. Expressão do movimento de um ponto pelo de tres movimentos rectilineos coordenados: equações finitas do movimento. Composição de velocidades simultaneas de um ponto: parallelogrammo, parallelipipedo, e, geralmente, polygono das velocidades. Movimento de um ponto em relação a um polo fixo: movimento areolar no plano e no espaço; movimento de circulação, e de resvalamento angular; velocidades respectivas. Propriedades projectivas do movimento de um ponto.

Applicações: projecção de um movimento circular e uniforme sobre um diametro — principaes propriedades da velocidade de um planeta no seu movimento ao redor do sol — methodo de Roberval para o traçado das tangentes ás curvas: exemplifica-se o methodo na aspira de Archimides, na conchoide, na quadratriz, nas conicas e na cycloide.

Theoria da acceleração

Incremento geometrico da velocidade; acceleração total; sua decomposição natural em acceleração tangencial e centripeta. Interpretação geometrica da acceleração total. Propriedades projectivas da acceleração total. Desvio elementar: importancia da sua consideração; expressão da acceleração no desvio. Equações differenciaes do movimento. Conhecimento que a consideração simultanea das noções de velocidade e acceleração dá do movimento de um ponto. Hodographos das accelerações.

2) Phoronomia dos solidos ou systemas invariaveis

Simplificações que ao estudo do movimento de um solido dá a hypothese da invariabilidade da fórma. Movimento elementar de um solido. As especies mais simples do movimento elementar de um solido; movimento de translacção e de rotação; suas propriedades geometricas e phoronomicas. Representação da rotação por um vector.

Figuras planas

Movimento de uma figura plana no seu plano: deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; centro ou polo instantaneo de rotação; determinação do polo pelo conhecimento das direcções das velocidades contemporaneas de dois pontos; situação do polo no infinito. Movimento continuo da figura plana; trajectorias polares; movimento epicycloidal plano.

Applicações ao movimento de uma recta de comprimento constante, cujos extremos são dirigidos pelos lados de um angulo: circulos de Cadran.

Movimento de uma figura plana no espaço: deslocação infinitamente pequena; fóco do plano; caracteristica; propriedades do fóco e da caracteristica. Caso em que a caracteristica passa ao infinito.

Figuras esphericas

Movimento de uma figura espherica na sua esphera; deslocação finita; deslocação infinitamente pequena; polo e eixo instantaneo de rotação; sua determinação. Movimento continuo da figura espherica: trajectorias polares esphericas; reducção do movimento da figura ao de rolamento das trajectorias polares esphericas; movimento epicycloidal espherico.

Solidos

Movimento de um solido cujos pontos se deslocam parallelamente a um plano fixo; sua reducção ao de uma figura plana no seu plano; rolamento cylindrico.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: sua reducção ao de uma figura espherica na sua esphera; theorema de Poinsot: rolamento conico. Relação que liga a velocidade angular ao redor do eixo instantaneo, a velocidade angular d'este eixo descrevendo as duas superficies conicas e os raios de curvatura d'ellas. Solução analytica: expressão em determinantes das componentes da velocidade linear de um ponto do solido.

Movimento o mais geral de um solido livre no espaço; deslocação finita; reducção a uma translacção e rotação; infinidade de combinações de dois movimentos do mesmo genero; quantidades que permanecem constantes em todos os systemas d'essas combinações; systema notavel em que a translacção é parallela ao eixo da rotação; seu estado unico: movimento heliçoidal; eixo de rotação e de resvalamento, sua construcção — deslocação infinitesimal: eixo instantaneo de rotação e de resvalamento; determinação da velocidade do movimento heliçoidal. Movimento continuo: imagem de Poinsot; imperfeição d'esta representação. Axoides: imagem de Poncelet. Superficies e contornos complementares dos axoides: theorema de Rouleaux que reduz o movimento mais geral de um solido ao rolamento de duas curvas.

b) MOVIMENTO RELATIVO

1) Movimento relativo de um ponto material

Relação entre a velocidade absoluta, relativa e de arrastamento. Casos de movimento relativo em que o movimento de arrastamento é uma translacção simples, uma rotação simples: exemplifica-se no movimento apparente do sol e no movimento diurno dos astros. Relação entre a acceleração absoluta, relativa, de arrastamento e complementar: theorema de Corolis, sua demonstração geometrica e analytica. Expressão em determinantes das componentes da acceleração complementar.

2) Movimentos elementares compostos ou relativos de um solido

Composição de translacções. Composição de rotações: 1.º ao redor de eixos parallelos: binario de rotações — 2.º ao redor de eixos convergentes. Composição de translacções e rotações.

Expressões analyticas da deslocação elementar de um ponto do solido em funcção dos seis parametros que definem o movimento mais geral do solido.

Acceleração no movimento dos solidos: centro das accelerações; logares geometricos dos pontos materiaes em que as accelerações tangenciaes e centripetas são nullas. Theorema de Rivals.

Passagem da phoronomia á estatica e dynamica

Principios fundamentaes da mecanica racional, considerados como factos primarios da constituição cosmica: I Principio da persistencia — II Principio da coexistencia — III Principio da mutualidade de acção.

As forças comparadas aos seus effeitos: noção de massa. Avaliação numerica das massas pelos pesos; densidade; homogenidade. Representação das forças por vectores.

Como a noção de massa opera a passagem dos theoremas e construcções da phoronomia para a dynamica: composição das forças applicadas a um mesmo ponto material; projecção das forças: decomposição de uma força applicada a um ponto material em força tangencial e normal á trajectoria do ponto; theorema de Coriolis em dynamica; força de inercia de arrastamento, força centrifuga composta.

Noção do trabalho das forças: alta importancia da noção do trabalho, tirada da sciencia economica, em vista da industria do homem e da grande industria da Natureza. Unidades de trabalho. Trabalho elementar de uma força: dois aspectos differentes de o considerar. Expressão do trabalho elementar de uma força emanante de um ponto fixo.

Trabalho virtual; importancia d'esta concepção como artificio de raciocinio. Theorema que liga o trabalho elementar da força resultante ao das forças componentes; theorema que liga o trabalho elementar de uma força relativo a uma deslocação qualquer aos trabalhos da mesma força relativos ás deslocações componentes d'aquella. Expressão do trabalho elementar de uma força em coordenadas rectangulares. Noção de momento de uma força em relação a um ponto, a um eixo e a um plano. Representação do momento por uma area plana; representação dos momentos por vectores: eixo do momento. Theorema do trabalho elementar de uma força na rotação do ponto de applicação da força ao redor do eixo. Determinantes que exprimem os momentos de uma força relativamente a tres eixos rectangulares. Modificações que soffrem estes determinantes devidas a uma translacção dos eixos coordenados. Expressão do momento de uma força relativamente a um eixo dado de posição em funcção d'aquelles determinantes. Theorema de Varignon.

B. — ESTATICA

1) Estatica do ponto material

Definição de equilibrio. Independencia das condições estaticas das forças e do estado de quietação ou de movimento do ponto material. Equações geraes do equilibrio. Reducção das tres equações do equilibrio a uma unica equação, por meio do trabalho virtual. Equilibrio de um ponto obrigado a uma curva e superficie; reacção normal da curva e da superficie; reducção d'este equilibrio ao do ponto livre. Equilibrio relativo de um ponto livre: applicação a um ponto pesado á superficie da terra; peso do ponto material.

2) Estatica dos systemas materiaes

Noções sobre a constituição dos systemas naturaes; distincção de forças interiores e exteriores. Hypothese da continuidade da materia nos corpos. Pressão n'um elemento dos systemas materiaes; isotropismo. Systemas obrigados a ligações: systemas invariaveis. Lemma relativo á somma dos trabalhos das forças interiores.

Equilibrio dos systemas obrigados a ligações (*principio das velocida-*

des virtuaes): reducção do systema ao de pontos livres. Theorema de Tschirnhausen servindo de lemma para obter a expressão do trabalho das forças de ligação. Annullação d'este trabalho para deslocações virtuaes compativeis com as ligações. Methodo de Lagrange para o estabelecimento analytico das equações geraes do equilibrio; sua importancia.

Exemplos.

Equilibrio dos systemas invariaveis; applicação do *principio das velocidades virtuaes* aos systemas invariaveis — 1.º caso em que o systema é livre: as seis equações necessarias e sufficientes que definem o equilibrio. Reducção do numero das equações de equilibrio em casos especiaes das forças applicadas: *a*) forças convergentes em um mesmo ponto; *b*) forças parallelas a um plano, a uma recta; *c*) forças situadas n'um mesmo plano. — 2.º caso em que o systema está obrigado a um ponto fixo, ou a um eixo fixo; equações da reacção do ponto ou do eixo.

Equivalencia das forças; sua expressão analytica por seis ou por uma equação. Consequencias immediatas da equivalencia.

Composição das forças; caso de forças convergentes; caso de duas forças parallelas — binario de forças.

Theoria dos binarios de forças: propriedades do binario; representação do binario por um vector (*eixo do binario*); propriedade projectiva do eixo; effeito dynamico de um binario applicado a um solido. Composição dos binarios.

Composição geral das forças: reducção de um systema qualquer de forças a duas; a uma resultante de transacção e a um binario; momento resultante. Expressão analytica da condição de reductibilidade de um systema de forças a uma unica força. Minimo dos momentos relativamente ás diversas posições da resultante de translacção (*dynamo*): *eixo central dos momentos* — representação geometrica de Poinsot dos eixos no espaço relativamente aos quaes se tomam os momentos de um systema de forças. Theorema de Charles relativo á invariabilidade de volume do tetraedro cujas arestas oppostas são os dois vectores que representam as forças equivalentes a um systema.

Equilibrio de um corpo que se appoia n'um plano fixo por um numero determinado de pontos; solução do paradoxo relativo ás pressões.

Centro das forças parallelas; propriedades caracteristicas. Centro de gravidade: centro de massa de solidos, superficies e linhas. Caso da homogenidade. Theoremas que podem facilitar a determinação do centro de gravidade. Exemplos principaes da determinação do centro de gravidade na hypothese da homogenidade.

Methodo centrobarico: theorema de Pappus — Guldin.

Equilibrio dos systemas funiculares: noção de tensão do cordão: equilibrio de um cordão actuado por tres forças: equilibrio do polygono funicular; construcção graphica de Varignon: casos particulares do polygono funicular; equações do equilibrio da curva funicular: applicação a um fio tenso sobre uma superficie — a um fio homogeneo pesado suspenso pelas extremidades (catenaria). Equilibrio dos systemas polygonaes articulados sem attricto.

Theoria geral da funcção de força; determinação simples das quantidades relativas á força por meio da funcção de força; representação geometrica por meio das superficies de nivel. Caso fundamental em que existe uma funcção de força: potencial. Theoremas de Laplace e de Poisson relativos ao parametro differencial da segunda ordem do potencial.

Applicação á attracção de uma esphera homogenea ou composta de camadas esphericas homogeneas sobre um ponto material situado no exterior ou interior da esphera.

Equações do equilibrio interior de um systema material qualquer: equilibrio do parallelipido e do tetraedro elementar. Ellipsoide das pressões. Orientação de um elemento plano sob uma determinada pressão.

Casos de systemas istropos: Hydrostatica. Equações geraes do equilibrio dos fluidos; equação de Clairaut. Superficie de nivel; expressão da pressão no parametro da superficie de nivel; propriedades isopiezica, isotherma e homogenica de uma camada de nivel.

Applicação aos liquidos pesados; altura representativa das pressões. Pressão de um liquido pesado sobre uma superficie immersa: centro de pressão; sua determinação geometrica e analytica no caso da superficie plana. Reducção das pressões elementares sobre uma superficie curva. Caso em que as pressões superficiaes dão resultante: *principio* de Archimedes. Equilibrio dos corpos fluctuantes.

Applicações: nivellamento barometrico; equilibrio relativo de um liquido que gira uniformemente ao redor de um eixo vertical.

Summaria exposição historica dos diversos principios sobre que se tem fundado a Estatica.

C. — DYNAMICA

1) Dynamica de um ponto material

Equações differenciaes dynamicas do movimento linear: problemas geraes que ellas exprimem; determinação das constantes arbitrarias. Expressão d'estas equações sob a fórma de equilibrio: força de inercia, equação do trabalho virtual que exprime o equilibrio dynamico.

Equações differenciaes dynamicas do movimento areolar.

Integraes geraes das equações differenciaes do movimento: Theorema do augmento da quantidade de movimento projectado — Theorema do trabalho; caso de funcção de força: theorema das forças vivas; expressão do theorema por meio das superficies do nivel. Dois casos importantes em que existe funcção de força — Theorema do accrescimo do momento da quantidade de movimento em relação a um eixo: interpretação phoronomica de Resal. Caso do theorema das areas. Forças centraes: expressão differencial de uma força central nos elementos da trajectoria.

Movimento de um ponto sobre uma curva e sobre uma superficie dadas: caso de funcção de força. Dynamica do movimento relativo de um ponto material: extensão dos theoremas geraes a este movimento.

Applicações:

Movimento rectilineo em geral: casos em que a integração se reduz a quadratura — Movimento rectilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central proporcional á distancia ao centro — Movimento rectilineo e vertical, descendente e ascendente, de um ponto pesado no vacuo e n'um meio resistente. Observação sobre as soluções singulares em mecanica: exemplo de Poisson—Movimento de um ponto pesado sobre uma recta inclinada.

Exemplos principaes de movimento curvilineo:

Movimento dos projectis no vacuo e em um meio resistente—Movimento curvilineo de um ponto attrahido ou repellido por uma força central; *a*) proporcional á distancia ao centro; *b*) inversamente proporcional ao quadrado da distancia ao centro; movimento dos planetas ao redor do Sol; leis de Kepler e suas immediatas consequencias.

Exemplos principaes do movimento de um ponto sobre uma curva e uma superficie: Movimento de um ponto material pesado movel sobre um circulo vertical; pendulo circular simples no vacuo: pendulo cycloidal no vacuo. Tautochrona e brachistochrona de um ponto pesado no vacuo. Pendulo circular em um meio resistente no caso de mui pequenas oscillações.

Exemplos de movimentos relativos: queda de um ponto pesado no vacuo attendendo ao movimento da terra: desvio Este confirmado pela experiencia de Reich em Freyberg. Pendulo de Foucault.

2) Dynamica dos systemas materiaes

Systemas obrigados a ligações:

Reducção da dynamica dos systemas á estatica dos systemas: *principio* de d'Alembert : seus differentes enunciados, e expressão analytica. Equações geraes do movimento estabelecidas pela applicação do methodo dos multiplicadores; vantagem da introducção das indeterminadas. Exemples do emprego do methodo. Theorema de Hamilton: equações dynamicas de Lagrange (primeira forma canonica); equações dynamicas de Hamilton (segunda forma canonica). Applicação das equações de Lagrange ao movimento de um ponto obrigado a uma esphera (pendulo conico).

Integraes da equação geral do movimento: Theorema do movimento do centro de gravidade—Theorema das quantidades de movimento projectadas—Theorema dos momentos das quantidades de movimento; interpretação phoronomica do Resal: theorema das areas; plano do maximo das areas; caso do plano invariavel—Theorema das forças vivas; theorema da energia; conservação da energia total do Universo ; theorema de Ivon Villarceau relativo ao virial.

Summario historico dos theoremas geraes da dynamica.

Theorema de Gauss do minino esforço. Theorema da menor acção.

Equações dos pequenos movimentos.

Estabelidade e instabelidade do equilibrio: theorema de Dirichlet. Coexistencia das pequenas oscilações e sobreposição dos pequenos movimentos.

Extensão dos theoremas geraes ao caso do movimento relativo.

Theorema de Newton da similhança em mecanica.

Propriedades mecanicas do centro de gravidade; theorema de Kœnig; trabalho da gravidade.

Systemas invariaveis: Decomposição do movimento de um solido livre em movimento do centro de gravidade e ao redor d'este centro; expressão da somma dos momentos das quantidades de movimento e da força viva de um solido movendo-se ao redor de um eixo.

Theoria dos momentos de inercia: momentos de inercia em relação a um eixo, a um ponto (*polar*), e a um plano; relação de dependencia das tres especies de momentos de inercia; raio de gyração; relação entre os momentos de inercia relativos a eixos parallelos; propriedade de minimo momento. Momento de inercia em relação a um eixo passante por um ponto; eixos principaes de inercia e momentos de desvio (*deviations moments, Ranckine*); propriedades dos eixos principaes e sua determinação; ellipsoide central. Expressão do momento de enercia de um solido de revolução em relação ao seu eixo. Momentos de inercia das figuras planas; ellipse central. Momento de inercia polar. Exemplos principaes da determinação de momentos de inercia.

Equações dynamicas do movimento de um solido ao redor de um eixo fixo; theoria do pendulo composto — pendulo simples synchrono; eixo de oscillação; propriedades de maximo e de minimo do tempo de uma oscillação.

Movimento de um solido ao redor de um ponto fixo: equações de Euler; formulas que exprimem as componentes de rotação instantanea nas velocidades de nutação, precessão e rotação propria do solido. Caso em que as forças são nullas, ou reductiveis a uma força que passam constantemente pelo ponto fixo: dois primeiros integraes das equações de Euler; estabelecimento directo d'estes integraes. Theoria geometrica de Poinsot.

Movimento de um solido de revolução homogeneo obrigado a um ponto fixo do seu eixo de figura—caso particular de uma precessão uniforme sem nutação, com rotação propria uniforme.—Applicação a um solido de revolução pesado homogeneo.

Movimento de um solido inteiramente livre, actuado por um systema qualquer de forças.

Theoria da percussão; theoremas relativos á variação da força viva na percussão. Applicação a um solido obrigado a um eixo fixo: centro de percussão. Pendulo balistico. Choque dos corpos; solução analytica de Poisson; solução geometrica de Darboux.

Hydrodynamica; equações geraes do movimento dos fluidos. Condições relativas á superficie. Fórma das equações ás derivadas parciaes no caso de funcção de força e de funcção de velocidade. Movimento permanente de um liquido pesado: theorema de Daniel Bernouilli; sua demonstração directa; theorema de Torricelli.

II — CINEMATICA

(THEORIA DOS MECANISMOS)

Objecto de cynematica theorica, considerado como sciencia da composição e do movimento das machinas, ou theoria dos mecanismos. Breve digressão historica sobre a origem e formação d'esta sciencia — exposição critica dos systemas de classificação dos mecanismos de Monge, Hachette, Lanz e Bétaucourt (1809-1819), Borgnis (1818); Limitação e denominação da sciencia por Ampère (1834); systema de Roberto Willis (1841), de Laboulaye (1849), de Haton de la Goupillière (1864). Razão da imperfeição dos systemas propostos. Constituição logica e scientifica da cinematica pelo systema

Reuleaux, fundado nas verdadeiras leis da formação dos mecanismos. Solução geral dos problemas das machinas: ponto de partida de Reuleaux; definição de machina. Caracteristica dos problemas relativos ás machinas. Analyse cinematica das machinas: decomposição em mecanismos, em cadeias, em binarios de elementos. Formação de um binario de elementos pela ligação reciproca dos elementos de dois binarios primitivos. Ligação de um numero qualquer de binarios de elementos: cadeia cinematica simples e composta; cadeia fechada desmodramica. Transformação da cadeia fechada em mecanismo. Pluralidade d'esta transformação. Transformação do mecanismo em machina.

Notação cinematica.

Differentes especies de binarios de elementos: condição a que deve satisfazer um binario de elementos para ser desmodramico. Binarios de elementos inferiores (parafuso, cylindro, prisma). Apoios necessarios e sufficientes dos elementos. Binarios superiores. Investigação geral dos perfis de elementos em vista de uma dada lei de movimento: processo geral de dentadura; theorema e construcção de Savary; processo approximado de Poncelet: processo de trajectorias polares auxiliares.

Caso em que a lei do movimento é definido por trajectorias polares circulares: engrenagens cylindricas nos tres typos principaes de lanterna, flancos, desenvolventes de circulo; processos de dentadura de Reuleaux. Engrenagem de cremalheira. Calculo do trabalho do attricto nos dentes de uma engrenagem. Engrenagens conicas; methodo practico de Tredgold. Engrenagens hyperboloides.

Binarios de elementos dependentes: clausura dos binarios por meio de forças sensiveis; clausura por meio de cadeias cinematicas. Elementos cinematicos ductís; binarios monocineticos (orgãos de tracção e de compressão); clausura cinematica completa dos elementos ductís.

Cadeiras cinematicas dependentes: pontos mortos nos mecanismos; passagem d'estes pontos por meio de forças sensiveis ou por clausura de cadeias.

Cadeia fundamental: *quadrilatero de manivella cylindrico;* trajectorias polares da cadeia; trajectorias polares reduzidas. Mecanismos derivados da cadeia. Transformação evolutiva da cadeia: *cadeia cylindrica de manivella de impulsão;* theoria geometrica e analytica da biella. Mecanismos d'ella derivados; machinas que elles constituem.

Principios geraes de modificação accessoria de fórma: 1.º amplificação dos moendes (Zapfen-Erweiterung) — 2.º reducção das cadeias. Applicação d'estes principios á cadeia de manivella ($C_3''P\perp$): amplificação 2 em 1, 1 em 2 (excentrico), 3 em 2, 2 em 3, 1 em 2 em 3, 3 em 2 em 1.

Transformação evolutiva da amplificação annular 2 em 3: *cadeia de corrediça em cruz rectangular;* mecanismos derivados.

Reducção do numero de membros de uma cadeia: exemplifica-se nas cadeias ($C_3''P\perp$) — c; ($C_3''P\perp$) — a — c; ($C_2 \llcorner C_2$) — c.

Capsulismos de manivella derivados da cadeia ($C_3''P\perp$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schemas das machinas de vapor de Simpson e Shipton, de Cochrane, de Davies; schemas das bombas de Beale e de Ramelli, do ventilador de Wedding).

Capsulismos de rodas derivados da cadeia simples de rodas dentadas cylindricas ($Cz + C_2''$): analyse feita sobre os modelos do gabinete (schema das machinas de Pappenheim, Fabry, Root, Evrard, Repsold, Dart, Revillion Galloway, Trens ordinarios de rodas dentadas; trens epicycloidaes.

Analyse cinematica das machinas tradicionalmente consideradas como *machinas simples:* alavanca, plano inclinado, cunha, roldana, sarilho, parafuso.

Analyse das machinas completas: concepção que considera a machina completa como o resultado da combinação das tres partes — receptor — transmissor — operador. Divisão das machinas em machinas de transporte e de transformação. Critica d'aquella concepção. Interpretação cinematica da machina completa.

Theoria geral do movimento das machinas.

METHODO DE ENSINO

O curso da 3.ª cadeira é dado em 70 lições (numero médio) de duas horas cada uma (seis semanaes) expostas na aula pelo professor. Depois de um certo numero de lições, que completem uma divisão do programma, os alumnos são interrogados pelo lente sobre as materias dadas (o numero dos interrogatorios não excede oito).

O professor expõe as lições segundo o programma, sem dependencia de compendio; para o que, préviamente á hora da lição, os calculos e as figuras são escriptos e traçadas com todo o desenvolvimento nas tres pedras da aula, sendo as duas horas da lição consagradas á exposição ora feita pelo professor. Indica-se, porém, como podendo servir de auxilio ao trabalho dos alumnos no estudo das lições expostas sobre o programma, a obra de *H. Laurent, Traité de mécanique rationnelle*, 2 vol., 2.ª edição, Paris, 1878; e faz-se opportunamente a bibliographia das principaes obras a consultar para maior desenvolvimento de alguns assumptos mais importantes do curso.

IV Cadeira — **Geometria descriptiva**

Lente *Duarte Leite Pereira da Silva.* Oito horas semanaes.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

PRIMEIRA PARTE

1 Objecto e historia da geometria descriptiva; methodo das projecções. Representação graphica do ponto, da recta e do plano, e problemas relativos; methodos de rebatimento e rotação. Projecções auxiliares, mudança de planos de projecção; pontos e linhas de construcção fóra do quadro graphico.

Problemas relativos aos angulos triedros; construcções respectivas.

2. Curvas planas, geometricas e graphicas. Tangente e normal, pontos singulares; traçado das tangentes e normaes a curvas graphicas, curvas d'erro. Curvatura, construcção do seu centro.

Projecções d'uma curva plana, e da tangente; partes uteis e parasitas.

Superficies; plano tangente, e normal. Curvatura; secções principaes, theorema d'Euler. Normalias, linhas de curvatura e geodesicas. Representação graphica d'uma superficie, contornos apparentes.

3. Cones e cylindros, em especial de 2.ª ordem, sua representação graphica. Construcção do plano tangente. Problemas em que entram como auxiliares cones e cylindros.

Secções planas d'um cone ou cylindro; caso em que são parallelas. Fórma das curvas; ramos infinitos e assymptotas. Processos para construir as projecções d'uma secção, e das suas tangentes.

Construcção da secção no seu plano. Transformada por planificação; methodo geral para o seu traçado.

4. Superficies de revolução, modos de geração. Planos tangentes, e normaes. Representação graphica das superficies de revolução e construcção do plano tangente.

Secções planas; methodos geraes para determinar as suas projecções, e a tangente n'um ponto qualquer.

Toro; fórma das secções planas, theorema das Yvon Villarceau. Hyperboloide de revolução; principaes propriedades.

5. Superficies regradas, modos de geração. Superficies planificaveis, e enviezadas; planos tangentes, aresta de reversão. Concordancia de duas superficies regradas ao longo d'uma geratriz.

Hyperboloide regrado; principaes propriedades. Divisão homográphica e propriedades anharmonicas das geratrizes. Representação graphica: construcção de planos tangentes e secções planas.

Transição para o paraboloide; estudo especial d'esta superficie. Sua representação graphica; construcção de planos tangentes e de secções planas.

Construcção do plano tangente a uma superficie regrada qualquer, por meio de hyperboloides e paraboloides auxiliares.

Estudo summario dos conoides, cylindroides, e superficies d'egual declive.

6. Quadricas; modos de geração, propriedades e theoremas geraes. Representação graphica das differentes especies de quadricas; construcção de planos tangentes. Secções planas; sua construcção.

7. Intersecção de superficies; curvas empenadas. Tangente, e plano normal, pontos singulares; plano e circulo osculador. Propriedades projectivas das curvas empenadas.

Methodos geraes de construcção da intersecção de duas superficies, e da tangente n'um ponto qualquer.

8. Intersecção de cones e cylindros, processos de construcção da curva e da tangente. Penetrações, arrancamentos, e casos mixtos. Fórma da curva; ramos infinitos e assymptotas, pontos singulares.

9. Intersecção de superficies de revolução e cones ou cylindros; processo de construcção da curva por meio de projecções conicas ou cylindricas, e traçado da tangente.

Intersecção de superficies de revolução. Processo de construcção no caso em que os seus eixos se encontram, e traçado da tangente, grau da projecção da intersecção no plano dos eixos. Caso geral em que os eixos se não encontram: varios processos de construcção, emprego de superficies auxiliares de revolução (Schiappa Monteiro), traçado da tangente.

10. Intersecção de quadricas. Discussão da curva; quarticas de segunda especie e cubicas; principaes propriedades. Theoremas geraes sobre as intersecções planas de quadricas.

Processos geraes de construcção da intersecção de quadricas, baseados na projecção conica (Schiappa Monteiro); traçado da tangente, e determinação dos pontos singulares.

Processos especiaes para o caso de duas quadricas de revolução (Chapuy), e duas quadricas regradas, com geratriz commum.

11. Noções de geometria projectiva.

12. Calculo graphico. Operações simples, potencias e raizes; logarithmos. Instrumentos de calculo. Operações graphicas sobre areas; transformação graphica de areas; planimetro polar.

13. Graphostatica. Representação graphica das forças. Composição de forças que actuam n'um ponto, parallelogrammo e polygono de forças. Composição de forças n'um plano; binarios, polygono funicular. Momentos de rotação das forças. Forças no espaço. Caso de forças parallelas; centro de gravidade. Momentos de inercia. Applicações.

SEGUNDA PARTE (4.º ANNO)

1. Superficies helicoidaes. Parafuzos de filetes triangulares e quadrados.

Traçado das engrenagens cylindricas, conicas e helicoidaes.

2. Projecções cotadas. Problemas relativos á recta e ao plano.

Cones e cylindros, construcção de planos tangentes.

Superficies topographicas.

3. Theoria das sombras. Definição; linha de separação de sombra e luz. Sombra propria e produzida. Methodos geraes para a resolução dos problemas de sombras; pontos brilhantes. Noções sobre aguadas.

4. Perspectiva linear conica. Definições; perspectiva de figuras no geometral, escala de larguras. Perspectiva d'uma elevação, escala de alturas; rebaixamento do geometral. Construcções directas sobre o quadro. Problema inverso da perspectiva.

5. Perspectiva cavalheira, axonometrica e isometrica.

6. Noções de stereotomia.

V Cadeira — **Astronomia e geodesia**

Lente (interino) *L. I. Wodhouse.* Oito horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 66 a 68).

VI Cadeira — **Physica**

Lente *Dr. Adriano de Paiva.* Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 68 a 83).

VII Cadeira — **Chimica inorganica**

Lente *Dr. José Diogo Arroyo.* Oito lições semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto de 1885-1886, pag. 83 a 89).

VIII Cadeira — **Chimica organica**

Lente *A. J. Ferreira da Silva.* Oito horas semanaes

PRIMEIRA PARTE

A. — CHIMICA ORGANICA GERAL

I. PRELIMINARES

1. *Noções geraes.* — Substancias existentes nos sêres vivos. Composição das substancias organicas. Substancias organisadas. Desenvolvimento historico da marcha seguida no estudo chimico dos compostos organicos: methodos analyticos, methodos syntheticos. Objecto e utilidade do estudo da chimica organica.

2. *Analyse elementar; formulas.* — Analyse qualitativa. Analyse quantitativa. Densidades gazosas; fundamentos dos principaes methodos empregados na sua determinação. Formulas racionaes baseadas na noção de atomicidade. Formulas de Berthelot.

3. *Isomeria. Metameria. Polymeria.* — Constituição dos isomeros.

4. *Classificação dos compostos organicos.* — Series homologas; funcções chimicas. Classificação por funcções (Berthelot). Divisão geral dos compostos organicos em gordos, aromaticos e de addição aromaticos.

II. CARBONETOS DE HYDROGENIO

1. *Carbonetos de hydrogenio em geral.* — Carbonetos fundamentaes. Classificação e nomenclatura dos carbonetos. Formação por analyse e por synthese.

2. *Carbonetos formenicos ou paraffinas.* — Formena ou methana. Oleos de petroleo; paraffina, vaselina, etc. Illuminação pelos compostos organicos. Chammas em geral e particularmente da lampada de Bunzen: applicações.

3. *Carbonetos ethylenicos (olefinas) e acetylenicos.* — Ethylena. Acetylena.

4. *Carbonetos camphenicos.* — Essencia de terebinthina. Oleos volateis ou essenciaes. Cautchu e gutaperka.

5. *Carbonetos benzenicos.* — Benzina e seus homologos; constituição e isomerias. Nitrobenzina.

6. *Outros carbonetos aromaticos.* — Breves noções sobre a naphtalina e a anthracena.

III. ALCOOES

1. *Alcooes em geral.* — Classificação, nomenclatura e principaes derivados dos alcooes. Importancia d'esta funcção.

2. *Alcooes monatomicos.* — Alcool ordinario; preparação do alcool. anhydro. Menção dos principaes alcooes monatomicos.

3. *Alcooes poly-atomicos em geral.* — Definição, derivados e classificação dos alcooes poly-atomicos.

4. *Glycerina ordinaria.*

5. *Alcooes hexatomicos e de atomicidade superior.* — Glucoses em geral e glucose ordinaria. Mel das abelhas. Saccharoses; analyse dos assucares. — Polysaccharides: amido, dextrina, cellulosa; gommas diversas.

6. *Phenoes.* — Phenol ordinario. Acido picrico e picratos. Pyrogalhol.

IV. ALDEHYDES

1. *Aldehydes em geral.* — Definição, classificação e nomenclatura dos aldehydes. Indicação dos principaes aldehydes.

2. *Aldehydes propriamente ditos.* — Aldehyde ordinario e chloral. Aldehyde benzoico.

3. *Acetonas, quinonas e carbonylos.* — Quinona. Anthraquinona e alizarina. Camphora; celluloide.

V. ACIDOS E SAES

1. *Acidos em geral.*—Definição e classificação dos acidos organicos. Indicação dos principaes.

2. *Acidos monobasicos de funcção simples.*—Acido acetico e acetatos. Acido valerico. Acido estearico. Acido oleico e sabões. Acido benzoico. Acidos phtalicos e phtaleinas. Acido succinico.

3. *Outros acidos.*—Noções sobre os acidos: oxalico, lactico, tartrico, malico, citrico, salicylico, galhico e tannico.

VI. ETHERES

1. *Etheres em geral.*—Classificação dos etheres. Enumeração dos principaes.

2. *Etheres dos alcooes monatomicos.*—Etheres do alcool ordinario; ether ordinario e theoria da etherificação. Chloroformio, bromoformio e iodoformio. Ether methylchlorhydrico. Ether acetico.

3. *Glycerides.*—Os corpos gordos naturaes; oleos liquidos e oleos concretos ou manteigas; gorduras ou banhas e ceras. Nitroglycerina e dynamite.

4. *Glucosides e cellulosides.*—Salicina, arbutina, populina, phlorizina, digitalina, amygdalina, esculina, convallarina etc.—Cellulosides nitricas: algodão-polvora, collodio.

VII. AMINAS

1. *Aminas ou alcalis organicos em geral.*—Classificação e nomenclatura dos alcalis organicos artificiaes.

2. *Aminas em particular.*—Rapido estudo da anilina e da toluidina. Importancia industrial dos seus derivados. Pyridina, quinoleina e bases analogas. Nevrina ou cholina. Glycollamina. Tyrosina. Sarcosina. Acido aspartico.

3. *Alcalis naturaes ou alcaloides.*—Alcalis fixos e volateis: methodos de extracção e constituição.

4. *Alcaloides em especial.*—Morphina, narcotina, quinina, estrychnina, nicotina, atropina, pilocarpina. Principios activos do chá, do café e do tabaco.

VIII. AMIDAS

1. *Amidas em geral.*—Definição e classificação das amidas: imidas e nitrilas. Indicação das principaes.

2. *Amidas em especial.*—Oxamida. Glycollamida. Taurina. Acido hippurico; asparagina. Anil azul e branco: synthese do anil.

3. *Compostos ou derivados azoicos.*—Azobenzol, etc.

IX. COMPOSTOS ORGANO-METALLICOS

1. *Compostos organo-metallicos.* — Sua origem e constituição. Zincoethyla. Cacodyla.

X. SERIE CYANICA

1. *Serie cyanica em geral.* — Theorias d'esta serie.
2. *Compostos importantes da serie cyanica.* — Cyanogenio. Acido cyanhydrico. Cyanetos simples, cyanetos duplos, sulfocyanetos. Cyanamida. Urêa. Urêas compostas; ureides. Acido urico. Creatina, creatinina e guanidina.

XI. PRINCIPIOS ALBUMINOIDES

1. *Materias albuminoides em geral.* — Constituição, propriedades, reacções geraes, e classificação das materias albuminoides.
2. *Albuminoides em especial.* — Estudo rapido da albumina, caseina, fibrina, gluten, osseina e gelatina.

Programma dos trabalhos praticos da 8.ª cadeira

A. — CHIMICA ORGANICA

1. Formena por meio do acetato de soda e a cal sodada.
2. Chloroformio por meio do alcool, da cal chlorada e da cal. Iodoformio por meio do alcool e do iodo.
3. Chloroformio por meio do hydrato de chloral e da potassa. Acção da potassa sobre o chloroformio.
4. Ethylena por meio do alcool e acido sulfurico. Chloreto de ethylena. Brometo de ethylena.
5. Acetylena por combustão incompleta.
6. Terebinthena e seus monochlorhydratos.
7. Benzina. Nitrobenzina.
8. Naphtalina por meio do alcatrão da hulha. Sublimação da naphtalina.
9. Fermentação alcoolica da glucose. Preparação do alcool absoluto.
10. Preparação da glycerina e do emplastro de chumbo. Preparação da mannita por meio do manná.
11. Preparação da glucosa por meio do amido. Reacções da glucosa.
12. Saccharato de cal. Assucar invertido.

13. Preparação do amido com a farinha de trigo. Acção da agua sobre o amido. Acção do iodo sobre o amido.
14. Preparação da cellulosa e acção do acido sulfurico (pergaminho vegetal).
15. Phenol ordinario e acido picrico.
16. Aldehyde ordinario por meio do alcool, do bi-chromato de potassa e do acido sulfurico.
17. Preparação da acetona por meio do acetato de cal.
18. Preparação da anthraquinona pela oxydação da anthracena.
19. Preparação do acido formico por meio do acido oxalico. Formiato de chumbo. Formiato de baryta.
20. Acido valerico por meio do alcool amylico. Valerato d'ammonia. Acidos dos corpos gordos. Sabões.
21. Acido benzoico por meio do benjoim. Acido oxalico por meio do assucar de canna e do acido azotico.
22. Preparação do acido tartrico e do tartrato de potassa e d'antimonio.
23. Preparação do ether iodhydrico. Preparação do ethylsulfato de baryta e do acido ethylsulfurico.
24. Preparação da anilina. Transformação em vermelho d'anilina.
25. Preparação da acetamida.
26. Preparação do sulfato de quinino.
27. Analyse organica elementar d'um composto ternario, formado de carbono, hydrogenio e oxygenio.
28. Analyse organica elementar d'uma substancia azotada.

B. — CHIMICA ANALYTICA

a) — Exercicios geraes d'analyse chimica

1. Reconhecer os saes dos metaes seguintes: prata, mercurio ao minimo e chumbo.
2. Reconhecer os saes dos metaes acima indicados e os do estanho (no maximo e no minimo), do arsenio e do antimonio.
3. Reconhecer os saes dos metaes antecedentes, e, além d'estes, os de mercurio, bismutho, chumbo, cobre e cadmio.
4. Reconhecer, além dos saes dos metaes precedentes, os de aluminio, ferro ao maximo, chromo e manganesio ao maximo.
5. Reconhecer, além dos saes dos metaes anteriores, os de ferro no minimo, nickel, cobalto, manganesio e zinco.
6. Reconhecer, além dos saes já referidos, os de baryo, stroncio e calcio.
7. Reconhecer, além dos compostos já indicados, os de magnesio, lithio, potassio e sodio.
8. Reconhecer os seguintes acidos, no estado de saes alcalinos: sulfurico, chlorhydrico, azotico, arsenico, borico, phosphorico, carbonico e sulfhydrico.
9. Reconhecer, no estado de saes alcalinos, os acidos indicados an-

teriormente e os seguintes: bromhydrico, iodhydrico, cyanhydrico, carbonico, arsenioso, sulfuroso e silicico.

10. Reconhecer, no estado de saes alcalinos, os acidos precedentes e os seguintes: chlorico, hypochloroso e chromico.

11. Reconhecer os saes insoluveis formados pelos elementos que constituem os saes soluveis, anteriormente analysados.

12. Trabalhos praticos com o massarico:

1 Acção da chamma reductora sobre os compostos dos següintes metaes: chumbo, cobre, bismutho, estanho, antimonio e zinco, sós ou misturados com os reductores, sobre o carvão.

2 Verificar os caracteres das perolas do sal de phosphoro córadas com os compostos dos metaes: chromo, manganesio, cobalto e cobre.

13. Reconhecer, por meio do massarico, compostos contendo um dos seguintes metaes: chromo, manganesio, cobalto, cobre, chumbo, bismutho, estanho, antimonio e zinco.

14. Reconhecer uma mistura de dois saes, tendo o mesmo acido e bases pertencentes a grupos analyticos diversos.

15. Reconhecer a mistura de dous saes, tendo a mesma base e dois acidos quaesquer.

16. Reconhecer a mistura de dous saes, tendo dous acidos e duas bases.

17. Reconhecer os elementos que compõem uma mistura de substancias insoluveis na agua e nos acidos.

b) — Trabalhos praticos especiaes aos alumnos de engenheria

1. *Analyse dos calcareos.* — Methodos rapidos de ensaio. Determinação do residuo insoluvel nos acidos, da alumina, do peroxydo de ferro, da cal, da magnesia, do acido carbonico e da agua. Separação da arêa e da argilla. Separação do peroxydo de ferro e da alumina. Separação da agua e do acido carbonico.

2. *Analyse d'uma cal ou d'um cimento.* — Doseamento da arêa siliciosa, da silica combinada, da alumina, de peroxydo de ferro, da cal, da magnesia, do acido sulfurico, do acido carbonico e da agua.

3. *Analyse d'uma argilla, arêa ou pozzolana.* — Determinação da silica e dos alcalis.

4. *Analyse do gesso.* — Determinação da agua, do acido carbonico, do acido sulfurico, do oxydo de ferro, da alumina e da cal. Doseamento da magnesia.

c) — Trabalhos praticos dos alumnos que se destinam ás escholas medicas

1. *Analyse das urinas.* — Determinação da densidade, das materias mineraes, da urêa, dos chloretos, dos phosphatos, da albumina, da glucose

e dos principios biliares. Exame microscopico para a investigação dos corpos pathologicos.

2. *Analyse toxicologica.* — Destruição das materias organicas. Investigação do phosphoro e dos compostos dos metalloides. Investigação do arsenio e compostos metallicos, principalmente do zinco, chumbo, cobre e mercurio. Investigação dos principios organicos, especialmente dos alcaloides.

3. *Analyse da agua potavel.* — Determinação do residuo fixo, do grau hydrotimetrico, do chloro, da materia organica. Enunciação dos resultados.

N. B. — Os programmas de CHIMICA ANALYTICA e de CHIMICA INDUSTRIAL são os mesmos do anno lectivo de 1885-1886.

IX Cadeira — **Mineralogia, paleontologia e geologia**

Lente (interino) *M. A. Gonçalves*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 95 a 100).

X Cadeira — **Botanica**

Lente *Dr. F. Salles Gomes Cardoso*. Seis horas semanaes

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 100 a 107).

XI Cadeira — **Zoologia**

Lente *M. A. Gonçalves*

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 107 a 109).

XII Cadeira — **Construcções em geral e resistencia dos materiaes**

Lente (interino) *M. Terra Pereira Vianna.* Seis horas semanaes

PRIMEIRA PARTE

CONSTRUCÇÕES EM GERAL

I Cantaria e alvenarias.

Elementos das cantarias e alvenarias. Pedras naturaes. Tijolos e outros productos artificiaes. Argamassas: cal, cimentos, pozzolanas, areia.

Execução das cantarias e alvenarias.

II Construcções de madeira.

Madeiras.

Samblagens e ligações.

III Construcções metallicas.

Metaes. Ferro e aço. Outros metaes e ligas.

Ligações.

IV Materiaes accessorios.

Gesso.

Betumes e asphalto.

Tintas e vernizes.

Vidros.

Materiaes accessorios de origem vegetal.

V Fundações.

Generalidades. Sondagens. Marcação das obras.

Fundações ordinarias.

Dragagens. Estacarias. Enseccadeiras. Massiços immergidos. Esgotos. Trabalhos executados debaixo da agua. Fundações pelo ar comprimido.

VI Organisação dos trabalhos.

SEGUNDA PARTE

RESISTENCIA DOS MATERIAES

PRELIMINARES

I Resistencia das peças em que predomina uma das dimensões.

1. Distensão e compressão das peças prismaticas.

2. Flexão plana das vigas rectas.
   a) Flexão das vigas rectas submettida a forças normaes.
   b) Caso das forças obliquas.
   c) Solidos de egual resistencia.
   d) Vigas apoiadas n'um numero qualquer de pontos.
3. Flexão plana das peças curvas.
4. Torsão dos prismas.
5. Equilibrio de certos systemas articulados.

II Resistencia das superficies.
Resistencia dos vasos cylindricos ou esphericos.
Espessura das caldeiras.

III Equilibrio e estabilidade dos massiços.
1. Theoria da estabilidade das abobadas.
2. Theoria do impulso das terras. Estabilidade dos muros de supporte.

TERCEIRA PARTE

GRAPHOSTATICA APPLICADA ÁS CONSTRUCÇÕES

1. Vigas apoiadas em 2 pontos. Theoria dos momentos de flexão e esforços transversos. Determinação graphica das forças.
2. Vigas de rotula simples.
3. Vigas apoiadas n'um numero qualquer de pontos.
4. Abobadas cylindricas.
5. Impulso das terras. Muros de supporte.

XIII Cadeira — Hydraulica e machinas

Lente *Roberto Rodrigues Mendes*. Seis horas semanaes

(Curso biennal)

1.º anno.—Hydraulica.—Machinas em geral.—Machinas hydraulicas.
2.º anno.—Thermo-dynamica.—Machinas thermicas.—Motores electricos.—Machinas diversas.—Construcção de machinas.

1.º ANNO

I — MACHINAS EM GERAL

1. Definição das machinas em geral. Receptores, transmissores e operadores. Principio da transmissão do trabalho nas machinas. Effeito dyna-

mico. Rendimento. Phases do movimento d'uma machina. Causas das perdas de trabalho e meios de as reduzir.

2. Moderadores e reguladores. Volantes.

3. Unidades de trabalho. Apparelhos destinados á medida do trabalho.

4. Motores em geral. Classificação dos motores. Noções geraes sobre os motores animados.

II — HYDRAULICA

a) — Preliminares

Recordação das principaes noções de Hydrostatica e Hydrodynamica. Generalisação do theorema de Daniel Bernouilli. Condições d'applicação d'este theorema a uma corrente de dimensões finitas. Extensão dos theoremas de Hydrostatica e Hydrodynamica a casos d'equilibrio ou de movimento relativo.

b) — Escoamento dos liquidos por orificios

1. *Casos em que pódem despresar-se os effeitos da viscosidade.* — Escoamento por orificios abertos em parede delgada. Fórma da veia liquida. Coefficiente de contracção e coefficiente de despeza. Escoamento por orificios abertos em paredes espessas. Effeito d'um alargamento na entrada do orificio. Tubo reintrante de Borda. Escoamento por orificios seguidos d'uma calheira. Descarregadores.

2. *Casos em que é necessario attender aos effeitos da viscosidade.* — Effeito dos alargamentos rapidos de secção. Theoria dos tubos addicionaes cilindricos ou conicos.

3. *Applicações diversas.* — Açude de vigotas. Batel-porta. Adufas.

c) — Movimento da agua nos tubos

1. *Theoria do movimento rectilineo e uniforme d'um liquido n'um tubo.* — Equação geral. Lei da distribuição das velocidades n'uma secção transversal. Velocidade média.

2. *Movimento da agua nos tubos simples de diametro e despeza constantes.* — Formulas diversas. Determinação experimental dos coefficientes numericos. Problemas diversos.

3. *Movimento da agua nos tubos simples de diametro e despeza variaveis.* — Caso em que as variações de diametro e de despeza não são continuas. Caso em que o diametro e a despeza variam continuamente. Tubos

de diametro variavel e despeza constante. Tubos de diametro constante e despeza variavel.

4. *Movimento da agua nos tubos complexos.*—Solução dos dous problemas geraes a resolver. Distribuições d'agua. Exemplos diversos.

d)—Movimento da agua nos canaes

1. *Movimento uniforme.*—Equação do movimento uniforme. Fórmulas empyricas e fórmulas theoricas. Distribuição das velocidades na secção transversal da corrente. Influencia da natureza da parede e das dimensões e fórma da secção transversal. Problemas diversos.

2. *Movimento variado.*—Fórmula fundamental. Problemas que esta fórmula permitte resolver. Transformação da mesma fórmula n'uma equação differencial a duas variaveis. Discussão da equação transformada. Casos particulares. Ressalto superficial. Effeito das mudanças rapidas de secção nos canaes.

e)—Resistencia dos fluidos

1. Pressão d'uma veia liquida contra um plano fixo. Pressão d'um liquido em movimento n'um tubo contra diversos obstaculos. Pressão d'um liquido indefinido. Experiencias de Dubuat. Resistencia ao movimento dos corpos fluctuantes.

2. Resistencia dos meios gazosos. Moinhos de vento.

3. Meios empregados para medir a velocidade dos fluidos. Medida da vasão das correntes.

f)—Movimento dos gazes

1. *Movimento dos gazes de temperatura constante.*—Equação do movimento. Escoamento permanente d'um gaz por um orificio. Effeito d'um tubo addicional. Movimento permanente d'um gaz n'um tubo cilindrico. Effeito das mudanças rapidas de secção nos tubos. Trabalho produsido pela compressão e expansão dos gazes.

2. *Movimento dos gazes de calôr constante.*—Casos em que não póde admittir-se a constancia de temperatura. Lei de Laplace. Fórmula que dá o trabalho de compressão e expansão n'este caso.

3. *Applicações diversas.*—Ventiladores. Machinas d'insufflação. Compressores.

III — MACHINAS HYDRAULICAS

1. *Preliminares.*—Motores hydraulicos em geral. Receptores que os utilisam e sua classificação. Equação do trabalho nos receptores hydraulicos.

2. *Rodas d'eixo horisontal.*—Rodas que recebem a agua inferiormente. Rodas de costado. Rodas que recebem a agua superiormente.

3. *Rodas d'eixo vertical.*—Turbinas. Rodas helicoidaes. Rodas de siphão. Rodas de reacção.

4. *Receptores diversos.*—Balança d'agua. Machinas de columna d'agua. Accumuladores.

5. *Machinas d'elevar agua.*—Bombas. Tympano. Parafuso d'Archimedes. Carneiro hydraulico.

6. Comparação entre os differentes receptores hydraulicos. Escolha do receptor. Quéda a utilisar. Emprego da força utilisada.

7. Installação e construcção dos receptores hydraulicos.

XIV Cadeira — **Construcções e vias de communicação**

Lente (interino) *R. Mendes*

(Curso biennal)

(6 HORAS SEMANAES)

1.º anno.— Edificios. Abastecimento d'agua e esgotos. Hydraulica agricola. Rios e canaes. Portos de mar e pharoes.

2.º anno.— Estradas e caminhos de ferro. Pontes.

1.º ANNO

I — EDIFICIOS

1. *Noções d'architectura.*—Architectura antiga. Architectura da idade média. Architectura moderna. Desenvolvimento successivo dos differentes systemas d'architectura. Observações sobre a architectura contemporanea.

2. *Elementos dos edificios*—Alicerces. Paredes. Soalhos. Tectos. Vigamentos. Coberturas. Portas e janellas. Escadas. Chaminés. Supportes isolados. Arcos. Abobadas.

3. *Combinação dos elementos dos edificios.* — Combinações horisontaes. Combinações verticaes.

4. *Partes principaes dos edificios.* — Porticos. Vestibulos. Pateos. Salas. Galerias.

5. *Composição dos edificios.* — Principios geraes de composição. Decoração.

6. *Edificios em geral.* — Partes principaes d'uma cidade. Edificios e estabelecimentos publicos. Edificios e estabelecimentos particulares.

7. *Noções de hygiene.* — Situação e orientação dos edificios. Condições geraes de salubridade. Aquecimento. Ventilação. Illuminação. Desinfecção.

II — ABASTECIMENTO D'AGUA E ESGOTOS

a) — *Abastecimento d'agua*

1. *Quantidade e qualidade das aguas.* — Quantidade d'agua a distribuir. Proveniencia das aguas. Caracteres das aguas potaveis. Filtração.

2. *Conducção das aguas.* — Captagem das nascentes. Aqueductos. Passagem dos valles. Elevação das aguas.

3. *Reservatorios de distribuição.* — Condições geraes d'estabelecimento. Modos de construcção.

4. *Distribuição das aguas.* — Traçado da canalisação. Diversas especies de tubos. Ensaio e assentamento dos tubos. Accessorios. Apparelhos de distribuição publica. Apparelhos de distribuição particular.

b) — *Esgotos*

1. *Generalidades.* — Systemas d'esgoto. Disposição geral da canalisação. Emissores. Collectores. Canos geraes e parciaes. Accessorios.

2. *Esgotos publicos e particulares.* — Destino dos esgotos. Meios de impedir as infiltrações e exhalações. Limpeza e ventilação dos esgotos. Despejos das casas. Canalisações particulares. Fossas.

3. *Construcção dos canos.* — Materiaes a empregar. Perfis. Declive. Ligações.

4. Depuração das aguas d'esgoto. — Applicação das aguas d'esgoto á agricultura.

III — HYDRAULICA AGRICOLA

1. *Saneamento do sólo.* — Systemas de saneamento. Drenagem. Effeitos e utilidade da drenagem. Execução dos trabalhos.

2. *Dessecamentos.* — Insalubridade e causas da formação dos pantanos.

Processos geraes de dessecamento. Dessecamento dos pantanos sujeitos á influencia das marés. Principaes obras a construir nos diversos systemas de dessecamento.

3. *Irrigações.*—Methodos diversos d'irrigação. Meios de obter as aguas d'irrigação. Canaes de derivação e distribuição das aguas. Obras d'arte.

IV — RIOS E CANAES

a) — Rios

1. *Estado natural dos cursos d'agua.* — Origem das aguas. Altura variavel das aguas. Causas da variação de nivel. Regimen dos rios. Acção das aguas sobre as margens e leito dos rios. Materiaes arrastados. Fórma do leito. Vasão dos rios.

2. *Navegação fluvial.* — Imperfeições que apresentam os cursos d'agua naturaes relativamente á navegação. Differentes processos de tracção e propulsão dos barcos.

3. *Obras para melhorar e estabelecer a navegação nos rios.* — Operações preliminares. Rectificação das sinuosidades. Diminuição da velocidade. Augmento da profundidade. Açudes. Portadas de navegação. Eclusas dos rios.

4. *Obras nos rios navegaveis.* — Dragagens. Rectificação e defeza das margens. Caminhos de sirga. Defeza contra as inundações. Portos e abrigos dos rios.

b) — Canaes

1. *Preliminares.* — Navegação dos canaes. Differença entre os canaes e os rios.

2. *Classificação dos canaes.* — Canaes lateraes. Canaes de ramal divisorio. Canaes maritimos.

3. *Eclusas*—Fórma e dimensões das principaes partes d'uma eclusa. Portas das eclusas. Meios empregados para encher e despejar as caldeiras.

4. *Alimentação dos canaes.* — Alimentação dos canaes lateraes. Alimentação dos canaes de ramal divisorio. Consumo d'agua d'um canal. Meios de diminuir o consumo d'agua das eclusas.

5. *Construcção.*—Traçado. Perfis longitudinal e transversaes. Estações. Aqueductos d'alimentação e descarregadores. Reservatorios. Subterraneos. Estancamento dos canaes. Crusamento com outras vias de communicação.

V — PORTOS DE MAR E PHAROES

a) — *Portos de mar*

1. *Movimentos da agua e do ar.* — Correntes. Marés. Ondas. Ventos.

2. *Regimen das costas* — Praias. Dunas. Corrosão das costas. Estuarios e deltas dos rios. Defesa das costas.

3. *Generalidades.* — Disposição geral dos portos e enseadas. Differença entre os portos do Oceano e os do Mediterraneo. Classificação dos portos.

4. *Obras exteriores dos portos.* — Enseadas. Entrada dos portos. Construcção dos molhes e quebramares. Particularidades de construcção dos principaes quebramares. Influencia das obras sobre o regimen das aguas e sobre a entrada e sahida dos navios.

5. *Obras interiores dos portos.* — Ante-porto. Caldeiras. Docas. Eclusas maritimas. Muros de caes. Accessorios.

6. *Desentulhamento dos portos.* — Dragagens. Correntes de varrer. Caldeiras de varrer.

7. *Obras para construcção e reparação dos navios.* — Estaleiros. Planos inclinados. Platafórmas de maré. Apparelhos elevatorios. Docas seccas. Docas fluctuantes.

8. *Balisagem dos portos.* — Marcas. Balisas. Boias. Signaes.

b) — *Pharoes*

1. *Disposições geraes.* — Distribuição e apparencias das luzes. Alcance luminoso e alcance geographico. Grupamento das luzes.

2. *Apparelhos d'illuminação.* — Apparelhos catoptricos. Apparelhos dioptricos. Combustiveis. Lampadas. Luz electrica.

3. *Edificios dos pharoes.* — Pharoes d'alvenaria. Pharoes de madeira. Pharoes de ferro. Pharoes fluctuantes.

XV Cadeira — **Montanistica e docimasia**

(Curso biennal)

1.º anno: — 1.ª parte — Docimasia; 2.ª parte — Metallurgia

2.º anno: — Arte de minas

(6 HORAS SEMANAES)

(Vide Annuario da Academia Polytechnica do Porto, de 1885-1886, pag. 116 a 122).

XVI Cadeira — Economia politica. Estadistica. Principios de direito publico, administrativo e commercial. Legislação.

Lente *A. Lobo.* (Seis horas semanaes)

PRIMEIRA PARTE

ECONOMIA POLITICA

1.—Definições de economia politica, riqueza, valor, utilidade e suas especies.

2.—Producção. Em que consiste o aperfeiçoamento da producção. Agentes da producção. Intervenção dos agentes naturaes em toda a producção.

3.—Trabalho, productivo e improductivo. Divisão do trabalho, limites naturaes, vantagens e inconvenientes da divisão do trabalho. Cooperação. Classificação das industrias, e influencia geral de cada uma d'ellas na producção.

4.—Cabedaes, materiaes e immateriaes, productivos e improductivos, activos e inactivos. Capital fixo e circulante. Influencia dos cabedaes na producção.

5.—Cabedaes (continuação). Machinas, suas vantagens e inconvenientes. Moeda, sua funcção economica.

6.—Moeda (continuação). Qualidades que deve ter a mercadoria intermediaria das trocas. Metaes preciosos. Unidade monetaria. Moeda subsidiaria. Cunhagem. Legislação patria ácerca de moeda.

7.—Moeda (continuação). Papel moeda, seus inconvenientes.

8.—Cabedaes (continuação). Cabedaes immateriaes: instrucção, bons costumes, credito. O credito é um cabedal como a moeda, a qual não tem outro fim senão supprir a falta ou as dificiencias do credito. Especies de credito, real e pessoal.

9.—Credito (continuação). Credito pessoal, instrumentos de credito.

10.—Credito (continuação). Estabelecimentos de credito. Bancos, operações bancarias, especies de bancos. Notas de banco, sua utilidade, differença entre as notas e o papel-moeda. Limites naturaes da emissão. Monopolio ou liberdade de bancos.

11 e 12.—Cabedaes (continuação). Formação, conservação, renovação e transmissão dos cabedaes materiaes. Liberdade. Propriedade. Segurança. Direito de testar. Direitos de transmissão.

13.—Formação dos cabedaes materiaes. Caixas economicas. Seguros.

14.—Cabedaes (continuação). Formação e realisação dos cabedaes pessoaes ou immateriaes.

Propriedade litteraria, artistica e de invenções.

15.—Continuação. Associação, seus principaes typos, sua força.

16.—Continuação da doutrina da realisação dos cabedaes pessoaes. Seguro de vidas. Monte-pios. Da instrucção tratar-se-ha no direito administrativo.

17 e 18.—Distribuição das riquezas. Theoria dos mercados. Dos preços. Leis dos preços. Tendencia para o equilibrio.

19.—Preços (continuação). Crises alimenticias.

20.—Preços (continuação). Crises commerciaes e industriaes.

21.—Lucros e aluguer dos cabedaes. Lei geral. Do juro, lei natural, taxa legal.

22 e 23.—Aluguer da terra. Discussão da theoria da renda de David Ricardo. Direitos da sociedade a respeito das terras incultas; discussão ácerca do direito de occupação.

24 e 25.—Salario. Leis naturaes dos salarios. Causas perturbadoras.

26.—Salario (continuação). Do supposto antagonismo entre o salario e o capital. Remuneração das funcções publicas.

27.—Emprego da riqueza. Consumo reproductivo e não reproductivo. Consumo não reproductivo, luxo e prodigalidade, leis sumptuarias.

28.—Consumo reproductivo; recapitulação das materias dadas a respeito da formação e renovação dos cabedaes.

29 e 30.—Consumos publicos. Do Estado, sua missão. Principios mais importantes ácerca dos impostos. (A doutrina dos impostos será desenvolvida no direito administrativo).

31.—População — Exame da lei de Malthus. Verdadeiros principios.

32.—População (continuação). Emigração e colonias.

33 e 34.—Provas e contraprovas dos principios expostos. Organisação natural do trabalho. Harmonias economicas (resenha das principaes leis expostas durante o curso).

Organisação natural (continuação). Liberdade de commercio.

35 e 36.—Organisação artificial, systema protector, balança de commercio, etc.

37 e 38.—Organisação artificial (continuação). Cooperações, restricções, regulamentos.

39.—Organisação artificial (continuação). Communismo e socialismo. Creta e Esparta. Platão.

40.—Communismo (continuação). Communidades asceticas. Anabaptistas.

41.—Communismo e socialismo (continuação). Thomas Morus. Campanella. Morelly.

42.—Communistas modernos, Babeuf, La Mennais, Cabet, Pedro Lerox.

43.—Socialismo. S. Simão, Roberto Owen, Fourier.

44.—Socialismo.—Luiz Blanc, direito ao trabalho. Proudhon.

ESTADISTICA

Noções geraes. Divisões. Methodos. Operações. Utilidade e progressos.

PRINCIPIOS DE DIREITO PUBLICO E ADMINISTRATIVO

1.—Formas de governo. Breve historia do governo parlamentar em Portugal. A carta, o acto addicional, e a reforma de 1885.

Divisão dos poderes politicos. Poder legislativo; duas camaras; camara dos senadores; camara dos deputados.

2.—Attribuições principaes das côrtes. Privilegios dos membros de uma e outra camara.

3.—Poder executivo. Do rei, irresponsabilidade do rei, responsabilidade dos ministros. Attribuições principaes do poder executivo. Secretarias d'estado, e indicação geral dos serviços que pertencem a cada uma.

4.—Poder moderador, sua missão e attribuições. Até que ponto são os ministros responsaveis pelos actos do poder moderador.

5.—Conselho d'Estado.

Poder judicial. Organisação. Em que consiste a independencia d'este poder. Da camara dos senadores como Tribunal de justiça.

6.—Do ministerio publico.

7.—Principaes garantias dos cidadãos, especialmente da liberdade de imprensa.

8.—Poder constituinte. Artigos constitucionaes e formalidades para a sua reforma. Delegação do poder legislativo. Suspensão de garantias.

Dictaduras, *bills* d'indemnidade. Modificações dos principios geraes de direito publico quanto ás provincias ultramarinas.

9.—Direito eleitoral. Systema da Carta, systema do acto addicional. Indicação das leis em vigor. Capacidade eleitoral activa e passiva. Recenseamento, recursos. Disposições mais importantes para manter a liberdade eleitoral.

10.—Administração. Natureza das funcções administrativas. Organisação do ministerio do reino. Divisão do territorio. Determinação dos limites, annexação e desannexação de freguezias ou parte d'ellas.

11.—Synopse da organisação administrativa. Juntas de parochia, organisação, lugar que occupam na administração, attribuições, regedores de parochia.

12.—Camaras, sua constituição. Rapida exposição das attribuições das camaras. Força e execução das suas posturas. (A exposição das attribuições das camaras tem só por fim dar a conhecer a natureza e importancia d'estas corporações; nos logares competentes se determinará mais amplamente a parte que lhe cabe em cada ramo da administração).

13.—Administradores de concelho ou bairro. Nomeação, gratificação, attribuições, delegação de attribuições nos regedores de parochia, e attribuições ordinarias dos mesmos regedores.

14.—Districtos. Governadores civis, nomeação, vencimentos, attribuições. Secretaria dos governos civis.

15.—Juntas geraes de districto, sua organisação, e attribuições. Commissão districtal. Concelhos de districto, sua constituição, e natureza das suas funcções em geral.

16.—Concelhos de districto (continuação); attribuições consultivas e contenciosas.

17.—Concelhos de districto (continuação); attribuições contenciosas. Principios geraes ácerca do contencioso administrativo. Generalidades ácerca do contencioso fiscal, de que se tratará mais amplamente nas lições sobre a fazenda publica.

18.—Supremo tribunal administrativo, sua constituição. Principaes termos do processo contencioso administrativo.

19.—Deveres da administração para com as pessoas, portuguezas e estrangeiras, definição. Dos estrangeiros, direito de azylo, extradicção, titulo de ligitimação e bilhetes de residencia, liberdade de cultos, direitos e deveres em materia civil, criminal e tributaria, naturalisação e seus effeitos.

20.—Deveres da administração para com as pessoas (continuação). Registo civil e ecclesiastico. Protecção aos incapazes, tutelas; abandonados, rodas, conselhos de beneficencia pupillar.

21.—Deveres (continuação). Protecção aos ausentes: no reino — curadoria; no estrangeiro — consulados, corpo diplomatico.

21.—Deveres (continuação). Pessoas moraes, sua capacidade civil. Leis de amortisação e desamortisação. Tutela administrativa, especialmente quanto aos actos das camáras municipaes e juntas de parochia.

22.—Deveres. Beneficencia. A caridade legal considerada economicamente. Soccorros publicos. Conselho geral de beneficencia. Estabelecimentos de beneficencia sujeitos immediatamente á administração publica ou subsidiados pelo Estado.

23.—Beneficencia (continuação). Estabelecimentos particulares e associações de piedade e beneficencia; principios da legislação que os rege, comprehendendo as leis vigentes de amortisação e desamortisação. Intervenção das auctoridades administrativas nos estabelecimentos de beneficencia de piedade; juntas de parochia. Principios legislativos ácerca dos legados pios.

24.—Deveres da administração quanto á segurança publica. Policia e suas divisões. Policia administrativa, funcções dos governos civis. Commissario de policia, e administradores de concelho. Corpos de policia. Guardas municipaes. Requisição de força publica. Considerações ácerca da policia preventiva: passaportes, restricções do direito á associação, etc.

25.—Policia sanitaria. Organisação d'este serviço. Junta consultiva de saude, serviço de saude nos districtos, concelhos e parochias.

Condições para o exercicio da medicina e pharmacia; deveres dos que exercem estas profissões. Boticas, armazens, lojas, etc.

26.—Saude publica (continuação). Vacina; prostituição, estabelecimentos insalubres, incommodos e perigosos; cemiterios e sua policia; pantanos e arrozaes.

27.—Saude publica (continuação). Estações maritimas de saude; lazaretos, quarentenas; providencias sanitarias a respeito dos navios que levam passageiros. Policia administrativa municipal, attribuições das camaras municipaes; partidos de medicina; guardas campestres.

28.—Policia judicial e correccional. Commissarios de policia e administradores de concelho. Termos principaes do processo criminal e correccional.

29.—Policia judicial (continuação). Classificação geral dos crimes; systema penal, penitenciarias e estabelecimentos penaes; prisão preventiva, fianças.

30 e 31.—Deveres da administração a respeito dos interesses moraes dos cidadãos. Instrucção e educação. Direcção geral e conselho superior de instrucção publica. Liberdade de ensino, restricções legaes.

Graus d'instrucção. Instrucção primaria, sua organisação em Portugal, comparada com a das outras nações cultas. Questões do ensino gratuito e obrigatorio.

32 e 33.—Instrucção (continuação). Instrucção real secundaria e superior. Instrucção classica secundaria e superior. Instrucção especial. Estabelecimentos diversos. Espectaculos publicos, sua influencia na instrucção e costumes, deveres das auctoridades administrativas a respeito dos espectaculos publicos.

34 e 35.—Deveres da administração quanto aos interesses moraes dos cidadãos (continuação). Religião, religião do Estado, liberdade de consciencia, casamento civil. Padroado. Beneplacito. Recurso á corôa. Concordatas.

36.—Força publica. Organisação do exercito e marinha.

Recrutamento.

37 e 38.—Fazenda publica. Simples indicação das fontes da receita publica. Organisação do ministerio da fazenda. Pessoal das repartições de fazenda. Classificação legal das contribuições e ideia geral de cada uma d'estas. Questões economicas do imposto unico ou multiplo, do capital ou rendimento proporcional ou progressivo.

39.—Contribuição predial. Se deve ser preferido o systema de quota, se o de repartição. Systema legal. Matrizes, sua formação, isempções, annullações e cobrança; reclamações e recursos. Deveres das diversas auctoridades administrativas e fiscaes no serviço da contribuição predial.

Contribuição industrial. Pessoas sujeitas a ella, isempções e excepções; taxas fixas, taxas variaveis, ordens de terras e classes d'industrias. Juntas de repartidores da contribuição industrial; gremios. Matrizes, lançamento e repartição, annullações, cobrança, reclamações e recursos. Attribuições das auctoridades administrativas e fiscaes no serviço da contribuição industrial. Imposto de pescado e de minas.

40.—Contribuição de renda de casas. Contribuição de registo, actos sobre que recahe, isempções, importancia do imposto nos diversos casos em que é devido, datas das leis e regulamentos ácerca d'esta contribuição. Auctoridades que intervem no serviço da contribuição do registo. Contencioso fiscal.

41.—Contribuição bancaria; imposto de rendimento. Principaes disposições das leis vigentes sobre estes impostos.

Decima de juros, sua base, manifesto, recursos. Imposto de sello, noções geraes, legislação que as rege. Matriculas e cartas. Direitos de mercê. Emolumentos das secretarias d'Estado.

42.—Contribuições indirectas. Breves noções sobre ellas.

43.—Monopolios do Estado: moeda e casa da moeda; correios e telegraphos.

Divida publica.

44.—Contabilidade publica, e seu objecto e divisão em legislativa, administrativa e judiciaria. Contabilidade legislativa, lei annual de despeza, orçamento geral do Estado, sua formação, apresentação, approvação e effeitos, anno economico, creditos ordinarios, supplementares e extraordinarios.

Orçamento rectificado. Contabilidade administrativa. Repartições de contabilidade nos ministerios, repartição dos creditos legislativos, distribuição de fundos, liquidação, ordenamento e pagamento das despezas publicas, centralisação de contabilidade.

45.—Contabilidade judiciaria. Tribunal de contas, seu regimento. Contas dos ministerios, periodos de gerencia e de exercicios. Contas geraes do

Thesouro e dos ministerios ás côrtes, encerramento difinitivo das contas dos exercicios findos, lei annual para o encerramento difinitivo dos exercicios findos, prescripção dos creditos legislativos.

46.—Organisação da fazenda publica nos districtos, comarcas e concelhos. Attribuições dos governadores civis, delegados do thesouro, thesoureiro pagador, administrador do concelho, escrivão de fazenda, recebedor e seus propostos.

Cobrança voluntaria, cobrança coerciva. Fiscalisação.

47.—Fazenda das corporações tanto administrativas como de piedade e beneficencia. Orçamentos geraes, orçamentos supplementares, despezas obrigatorias e facultativas; contas.—Da fazenda municipal em particular; despezas obrigatorias e facultativas e sua analyse.

48—Fazenda municipal (continuação). Receitas ordinarias e extraordinarias, exame legal e economico de cada fonte de receita municipal. Bens municipaes, requesitos para a sua alienação. Questões com as Juntas de parochias ácerca de baldios, pastos e logradouros communs. Questões de limites.

49.—Fazenda municipal (continuação). Orçamento, formação, approvação, effeitos. Contabilidade municipal.

PRINCIPIOS DE DIREITO COMMERCIAL

1.—Divisão das materias do direito commercial—commercio terrestre, commercio maritimo, juiso commercial. Difinição do direito civil, caracter da lei mercantil. Relações entre o codigo civil e o commercial; disposições commerciaes em rasão das pessoas, e por effeito de certos actos; 1.º em rasão das pessoas, commerciantes, requisitos para ser commerciante, capacidade legal, matricula, exercicio habitual de commercio; liberdade de exercer commercio, direito antigo e moderno ácerca da liberdade de commercio, restricções quanto aos corretores, despachantes etc.; licenças, menores, mulheres, estrangeiros. Vantagens de que gosam os commerciantes.

2.—Obrigações communs a todos os que professam o commercio. Registo publico do commercio, o que é, quem escreve n'elle, e seus fins em geral. Escripturação e correspondencia mercantil. Prestação de contas.

3.—Actos commerciaes, noção geral de cada um dos actos mencionados nos artigos 203 e 204 do codigo commercial.

4.—Contractos. Noções do mutuo e usura, commodato e aluguer, deposito e penhor, differenças entre estes contractos. Do mutuo commercial, nomenclatura do codigo civil, differenças entre a legisção commercial e civil, requisitos para que o mutuo seja mercantil, liberdade na estipulação dos juros segundo o codigo civil, falsa liberdade segundo o codigo commercial; juros legaes; differença essencial entre o mutuo e os outros contractos de credito mercantil nos seus effeitos a respeito de terceiro.

5.—Commodato, locação, conducção. Requisitos para que seja mercantil cada um d'estes contractos, direitos e obrigações que d'elles resultam.

Legislação especial ácerca das impreitadas contractadas com o governo ou com a administração do districto, municipio ou parochia.

6.—Deposito, penhor, fianças commerciaes.

Da troca e da compra e venda, definições, analogias e differenças, direitos e obrigações resultantes d'estes contractos.

7.—Lettras de cambio, definições e requesitos, origem e utilidade das lettras de cambio, sello das lettras. Direitos e obrigações que resultam d'ellas. Livranças, cheques, lettras de terra, cartas de credito.

8.—Mandato e commissão, gestão de negocios, definições, analogias e differenças, direitos e obrigações que resultam d'estes contractos. Negociantes de commissão, feitores, caixeiros, correctores.

9.—Associações commerciaes. Differentes especies d'ellas, principios communs a todas.

10.—Sociedades anonymas, sua utilidade, natureza, designação, constituição, administração, fiscalisação, dissolução e liquidação, direitos e obrigações dos accionistas, das sociedades e da direcção. Sociedades anonymas estrangeiras. Deveres do governo a respeito das sociedades anonymas.

11.—Sociedades cooperativas. Historia e indole d'estas associações. Exame da lei de 2 de julho de 1867.

12.—Sociedades com firma, de capital e industria, tacita, associação em conta de participação, parceria mercantil, associação de terceiro á parte de um socio. Consignação em conta de participação e á commissão. Noções geraes.

13.—Sociedade (continuação). Formalidades da sociedade mercantil. Dos que podem ser socios e dos que são reputados socios commerciaes. Administração social, direitos e deveres dos socios entre si, para com a sociedade e para com terceiros.

14.—Sociedades (continuação). Dissolução e liquidação das sociedades. Arbitramento em sociedades.

15.—Principios geraes ácerca das obrigações commerciaes e modos porque se dissolvem as provas.

16.—Fallencias. Quebras, sua abertura, qualificação e effeitos; medidas provisorias, funcções do curadór fiscal provisorio.

17.—Fallencias (continuação). Ajuntamento dos credores; concordata, administradores da quebra, preferencias, rateio, rehabilitação do fallido, moratorias.

18.—Commercio maritimo.—Embarcações, sua natureza, capacidade para as adquirir, modos de adquirição e seus effeitos, matricula, vistorias para que o navio possa ser aparelhado, ou tomar carga; embargos d'embarcação, privilegios; commercio entre portos nacionaes.

19.—Parceria maritima, modos porque se faz. Responsabilidade e direitos dos donos, compartes, caixas, capitães, contra-mestres, pilotos, e sobre-cargas dos navios.

20.—Ajuste e soldadas dos officiaes e gentes da tripulação, seus direitos e obrigações.

21.—Fretamentos e conhecimentos, fórma e objecto dos contractos de fretamento, e direitos que d'elles resultam. Conhecimentos, seus requisitos e effeitos.

22—Abalroação; quem, quando e como responde pelo damno causado por abalroação. Naufragio, varação e fragmentos naufragos, varas forçadas.

23—Contractos de risco, sua definição e requesitos, transferencia da lettra de risco. Seguro, natureza, objecto e fórma d'este contracto. Pessoas e objectos que podem segurar e ser segurados. Direitos e obrigações do segurador e segurado.

24—Seguros (continuação). Seguro de vidas, breve historia dos estabelecimentos de seguros de vidas em Portugal, tabellas da mortalidade, differentes fórmas porque se póde effectuar este seguro.

25—Avarias, definição, especies, regulação de avarias, repartição e contribuição. Extincção das obrigações em materia de commercio maritimo.

SEGUNDA PARTE

LEGISLAÇÃO

Deveres da administração a respeito dos interesses materiaes da sociedade. Organisação do ministerio das obras publicas, commercio e industria. Direcção dos correios e telegraphos. Serviço postal e telegraphico interno e internacional. Engenheria civil e militar. Expropriação por utilidade publica. Estradas e ruas das povoações. Classificação das estradas. Relações do estado, dos districtos e dos concelhos com a viação publica. Caminhos de ferro; sua historia em Portugal. Policia dos caminhos de ferro. Legislação patria ácerca de minas. Regulamentos para os serviços de obras publicas e minas. Regulamentos de administração e contabilidade de obras publicas.

XVII — Cadeira — Escripturação em geral e especialmente dos bancos. Contabilidade industrial

Lente *J. J. Rodrigues de Freitas*

I

Recordação dos principios de contabilidade mencionados no programma dos lyceus. Applicação d'elles. Documentos commerciaes.

II

A lei e o balanço. Concordancia entre os lucros, quaes a escripturação os mostra, e os que resultam do inventario e balanço; registro da analyse das contas por partidas dobradas; modo de saldar as contas; balancete de verificação. Reabertura das contas. Avaliação das mercadorias; analyse das opiniões a este respeito.

Diversas contas: liquidações, papeis de credito, predios, navios, contas suspensas, dividas mal paradas, letras protestadas, contas em moeda estrangeira, consignações de conta alheia, seguros.

Erros na escripturação e modo de os corrigir. Referencias no Razão. Passagem de contas de uma a outra pagina. Abertura de livros novos.

Diversos systemas de escripturação, incluindo os de Corboni e Augier. Escripturação de uma sociedade collectiva, ou em commandita, ou anonyma. Abertura dos livros, distribuição de lucros, encerramento e reabertura das contas. Liquidação e dissolução.

Escripturação bancaria. Divisão das contas. Livros principaes e auxiliares. Capital e acções. Descontos e cobranças. Ordens sobre succursaes e agentias. Letras; papel cambial. Deposito de dinheiro e papeis, cheques, contas correntes garantidas. Emprestimos sobre penhores. Emissão de notas e obrigações. Compra e venda de titulos. Commissões. Caixa. Formação dos balançetes e balanços; divisão dos lucros em dividendo, fundos de reserva e outros. O balancete do Banco de Inglaterra. Contabilidade geral. Contabilidade dos escriptorios de liquidação (*Clearing house*).

III

Contabilidade industrial. As transformações industriaes e a escripturação. As materias primas e os productos acabados. Livros principaes e auxiliares. — Formação do preço médio. O preço do custo e as contas de armazem, mão de obra, gastos geraes e productos acabados. Inventario e balanço. Inventario das mercadorias em armazem, classificadas em materias primas, productos em curso de fabricação, e productos acabados. Applicação d'estas doutrinas ás industrias de fiação de seda e de transportes. Noções geraes sobre contabilidade publica.

CALCULO COMMERCIAL

I

Recordação das noções de calculo commercial mencionadas no programma do curso dos lyceus.

Resolução de problemas a este respeito.

II

Cambios. Os metaes preciosos nas suas relações reaes e legaes.

O commercio d'estes metaes, especialmente na praça de Londres.

Relações monetarias internacionaes com o kilogramma de ouro; e relações das moedas entre si: por intrinseco e reciproco; valor d'ellas em Bancos e casas de Moeda.

Unidades cambiaes: (tempo e moeda) diversos typos de papel cambial; o certo e o incerto.

Equação de cambio.

Cambio par, alto e baixo; favoravel e desfavoravel.

Cotações cambiaes. Nivellamento das cotações.

Arbitragens. Paridade, ou par proporcional.

Ordens de banco.

Despezas cambiaes.

Operações de Bolsa. Operações a dinheiro, e a prazo; operações firmes e a premio. Arbitragens em ouro e prata; mercadorias e papeis de credito; cambios fixos.

Annuidades e amortisações. Capital formado por meio de annuidades, e pagamento de dividas. Relação entre a importancia da divida, a annuidade, a duração do emprestimo e a taxa. Decomposição da annuidade em juro e amortisação. Reembolso de emprestimo por annuidades, começando o pagamento d'ellas certo numero de annos depois de contrahido aquelle. Emprestimos publicos e de companhias: emissão de obrigações. Taboas de juros compostos, annuidades e rendas vitalicias.

População. Taboas de mortalidade; sua formação. Vida média e provavel quantidade de existencia, probabilidade de sobrevivencia.

Rendas vitalicias, rendas temporarias e suas especies; formação de capitaes; companhias de seguros de vida: mutualidade e premio; suas operações; seguros no caso de doença.

Caixas de pensões.

XVIII Cadeira

Lente *Francisco da Silva Cardoso*

Esta cadeira, segundo o Decreto de 10 de setembro de 1885, comprehende o ensino de desenho, para os differentes cursos academicos, distribuido em tres partes, a saber:

I PARTE—Desenho de figura, paisagem e ornato.

II PARTE—Desenho de architectura e aguadas.

III PARTE—Desenho topographico. Desenho de machinas.

O ensino de cada uma d'estas partes é dado em tres lições semanaes de duas horas cada uma. Os alumnos de todas as tres partes estão reunidos no salão de desenho da Academia; o professor dirige individualmente os alumnos no trabalho que a cada um destinou, fazendo nos trabalhos as correcções necessarias, e ministrando aos alumnos, n'essa occasião, as explicações theoricas convenientes.

Na I.ª parte, os alumnos copiam uma estampa a lapis e a esfuminho —na II.ª parte, fazem o desenho completo do pedestal, da base, do capitel e entablamento das ordens dorica e jonice, e dos capiteis corinthio e composito, e das aguadas a nankim—na III.ª parte copiam de estampas topographicas a lapis e á penna; fazem á vista o esboço acompanhado de cótas de uma machina, e convertem este esboço em desenho geometrico, sujeito a escala, e aguarellam com as tintas convencionaes. O estudo d'esta ultima parte é precedido de trabalhos de copia de machinas em estampas.

SECÇÃO SCIENTIFICA

FRAGMENTOS DE UM CURSO D'ANALYSE INFINITESIMAL

POR

F. GOMES TEIXEIRA

III

(CALCULO DIFFERENCIAL)

Derivando esta equação relativamente a x e a y, obtemos as equações

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) . \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) . \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

d'onde se deduz

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Esta equação, independente das funcções arbitrarias é a equação ás derivadas parciaes das superficies planificaveis.

3) As superficies planificaveis gozam da seguinte propriedade importante:

Nas superficies planificaveis o plano tangente n'um ponto é tambem tangente em todos os outros pontos da mesma caracteristica.

Resulta esta propriedade do theorema II.

4) As superficies cylindricas e conicas estão comprehendidas na familia das superficies planificaveis. As primeiras são as envolventes das posições que toma um plano que se move parallelamente a uma recta dada. As segundas são as envolventes das posições que toma um plano que passa por um ponto dado. Para applicar a equação das superficies planificaveis, vamos procurar a equação da familia das superficies conicas.

Sendo (a, b, c) o ponto fixo por onde deve passar o plano gerador, temos as equações de condição

$$c = Aa + \varphi(A)\, b + \psi(A)$$

$$a + \varphi'(A)\, b + \psi'(A) = 0,$$

entre as quaes e as equações geraes das superficies planificaveis se deve eliminar uma das funcções arbitrarias, $\psi(A)$ e $\psi'(A)$ por exemplo. Vem pois

$$z - c = A(x - a) + \varphi(A)(y - b)$$

$$x - a + \varphi'(A)(y - b) = 0 .$$

A primeira d'estas equações dá

$$\frac{z - c}{x - a} = A + \varphi(A)\frac{y - b}{x - a},$$

e como a segunda mostra que A é funcção de $\frac{y - b}{x - a}$, vem a equação geral das superficies conicas

$$\frac{z - c}{x - a} = \psi\left(\frac{y - b}{x - a}\right)$$

onde ψ representa uma funcção arbitraria.

3.ª — Procuremos a superficie envolvente dos planos osculadores de uma curva dada, cujas equações são

$$y = \varphi(x),\ z = \psi(x).$$

A equação do plano osculador é (n.º 71 — IV)

$$y''(Z - z) = (z'y'' - y'z'')(X - x) + z''(Y - y),$$

e portanto a equação da superficie pedida resulta de eliminar o parametro arbitrario x entre esta equação e a sua derivada relativamente a x:

$$y'''(Z - z) = (z'y''' - y'z''')(X - x) + z'''(Y - y).$$

Esta eliminação não póde ser effectuada sem se especificar primeiro as funcções φ e ψ.

Para achar as equações da aresta de reversão, temos de empregar, além das equações precedentes, a equação que resulta de derivar a segunda relativamente a x:

$$y^{(4)}(Z - z) = (z''y''' + z'y^{(4)} - y''z''' - y'z^{(4)})(X - x) + z^{(4)}(Y - y),$$

e de eliminar depois x entre as tres equações. Como a estas tres equações se satisfaz pondo

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z$$

segue-se que a curva proposta é aresta de reversão da superficie considerada.

CAPITULO IV

DERIVADAS E DIFFERENCIAES D'ORDEM QUALQUER

I

Formação das derivadas d'ordem qualquer

77. — Por meio das regras dadas no capitulo II pode-se formar successivamente as derivadas y', y'', etc. da funcção $y = f(x)$. Ha porém questões em que é necessario conhecer a lei d'estas derivadas, isto é, a funcção de x e n que representa a derivada $y^{(n)}$; vamos pois agora achar esta funcção, considerando os mesmos casos que nos n.os 45 e 46, por ordem diversa.

78.—*Derivadas d'algumas funcções simples.*—1) Formando as derivadas successivas da funcção

$$y = x^k,$$

acha-se

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)x^{k-2},$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{k-n},$$

qualquer que seja k.

2) A funcção

$$y = e^x$$

dá

$$y' = e^x,\ y'' = e^x,\ y''' = e^x,\ \ldots,$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = e^x.$$

Nota. — Se fôr

$$y = e^{kx},$$

e k constante, teremos do mesmo modo

$$y^{(n)} = k^n\,e^x.$$

Esta formula, dando a n valores negativos ou fraccionarios, define as derivadas d'ordem negativa ou fraccionaria da funcção e^{kx}. Esta noção estende-se depois a todas as funcções que forem susceptiveis de serem desenvolvidas em série convergente da fórma:

$$y = \Sigma A e^{kx},$$

onde A e k são constantes, pondo

$$y^{(n)} = \Sigma A k^n\,e^{kx},$$

se todavia esta série fôr tambem convergente. A respeito d'este assumpto, que aqui só podemos indicar, podem-se consultar varias memorias notaveis de Liouville (*Journal de l'École Polytechnique de Paris*).

3) A funcção

$$y = \log x$$

dá

$$y' = x^{-1},$$

e portanto, derivando $n - 1$ vezes y',

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,.\,x^{-n},$$

representando por $(n-1)!$ o producto $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)$.

4) A funcção

$$y = \operatorname{sen} x$$

dá

$$y' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \operatorname{sen}\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

e, em geral,

$$y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

5) A funcção

$$y = \cos x$$

dá do mesmo modo

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

79. — *Theoremas geraes.* — **I** — Seja

$$y = u_1 + u_2 + \ldots + u_m,$$

onde u_1, u_2, etc. representam funcções de x. Teremos evidentemente

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \ldots + u_m^{(n)}.$$

Nota.—A derivada de ordem n da somma

$$y = \sum_{k=0}^{m} A_k x^k,$$

onde k e m são inteiros positivos, é

$$y^{(n)} = \sum_{k=n}^{m} A_k k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}.$$

Fazendo $x=0$ e chamando $y_0^{(n)}$ o valor correspondente da derivada $y^{(n)}$, vem o resultado

$$y_0^{(n)} = A_n\, n\,!\,.$$

II—Procuremos a derivada de ordem n do producto

$$y = u_1 u_2$$

de duas funcções dadas.

Temos

$$y' = u'_1 u_2 + u_1 u'_2$$

$$y'' = u''_1 u_2 + 2u'_1 u'_2 + u_1 u''_2$$

$$y''' = u'''_1 u_2 + 3u''_1 u'_2 + 3u'_1 u''_2 + u_1 u'''_2$$

....

Observa-se n'estas igualdades que os coefficientes são os mesmos que os coefficientes dos desenvolvimentos das potencias 1.ª, 2.ª, 3.ª do binomio $u_1 + u_2$, e que os indices superiores são os mesmos que os expoentes de u_1 e u_2 nos mesmos desenvolvimentos. Somos pois levados, por inducção, a escrever a formula:

$$y^{(n)} = u_1^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i-1)}$$

$$+ \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots u_1 u_2^{(n)}$$

ou

$$(1) \qquad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \ldots i} u_1^{(n-i)} u_2{}^{(i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1{}^{(n-i)} u_2^{(i)}$$

representando por $\binom{n}{i}$ o numero de combinações de n lettras tomadas i a i.

Para demonstrar esta formula basta provar que, se é verdadeira para o indice n, tambem é verdadeira para o indice $n+1$. Para isso derivemos outra vez, o que dá

$$y^{(n+1)} = u_1^{(n+1)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i-1} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)}$$

$$+ \binom{n}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)} + \ldots + u_1 u_2^{(n+1)}$$

ou

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u_1^{(n-i+1)} u_2^{(i)},$$

por ser

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}.$$

A formula (1), devida a Leibnitz, póde ser escripta *symbolicamente* do modo seguinte:

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2)^{(n)},$$

que significa que se deve desenvolver $(u_1 + u_2)^n$ pela formula do binomio e substituir no resultado os expoentes por indices de derivação.

Do mesmo modo, no caso da funcção

$$y = u_1 \,.\, u_2 \ldots u_m$$

temos *symbolicamente*

$$y^{(n)} = (u_1 + u_2 + \ldots u_m)^{(n)}.$$

Com effeito, suppondo que esta formula tem logar no caso de o numero dos factores ser menor do que m, ainda tem logar no caso de o numero dos factores ser m, porque, pondo $y_1 = u_2 \,.\, u_3 \ldots u_m$, temos

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} y_1^{(i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_1^{(n-i)} (u_2 + u_3 + \ldots + u_m)^{(i)}$$

$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)^{(n)}.$$

D'esta formula tira-se

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, u_1^{(i_1)} \,.\, u_2^{(i_2)} \ldots u_m^{(i_m)}}{i_1!\, i_2! \ldots i_m!}$$

em que o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n.$$

III — Consideremos agora a funcção

$$y = \frac{u_1}{u_2}.$$

Temos

$$u_1 = y u_2$$

$$u'_1 = y' u_2 + y u'_2$$

....

$$u_1^{(n)} = y^{(n)} u_2 + \ldots + \binom{n}{i} y^{(n-i)} u_2^{(i)} + \ldots + y u_2^{(n)}.$$

Por meio d'estas igualdades obtem-se successivamente as derivadas y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ da fracção proposta; ou directamente a derivada $y^{(n)}$ expressa por um determinante.

IV — Seja y uma funcção de x determinada pelas equações:

$$(A) \qquad y = f(u),\ u = \varphi(x)$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Temos

$$y' = \frac{dy}{du} u'$$

$$y'' = \frac{d^2y}{du^2} u'^2 + \frac{dy}{du} u''$$

$$y''' = \frac{d^3y}{du^3} u'^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} u' u'' + \frac{dy}{du} u'''$$

....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n de y é uma somma da fórma:

$$y^{(n)} = \Sigma A \frac{d^iy}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda,$$

A, α, β, γ, ..., λ, i sendo numeros inteiros que vamos determinar. Para isso, appliquemos a formula precedente á funcção:

$$y = u^n,\ u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

onde a_0, a_1, ..., a_n representam constantes arbitrarias; o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma An(n-1)\ldots(n-i+1)u^{n-i}(u')^{\alpha}(u'')^{\beta}\ldots(u^{(n)})^{\lambda},$$

e, pondo $x = 0$ e notando que é (n.º 79—I) $u_0^{(k)} = k!\,a_k$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma An(n-1)\ldots(n-i+1)(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}a_0^{n-i}a_1^{\alpha}a_2^{\beta}\ldots a_n^{\lambda}.$$

Por outra parte, temos

$$y = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^n$$

$$= \Sigma \frac{n!\,a_0^{h_0}a_1^{h_1}a_2^{h_2}\ldots a_n^{h_n}x^{h_1+2h_2+3h_3+\ldots+nh_n}}{h_0!\,h_1!\,h_2!\ldots h_n}$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de h_0, h_1, etc. que satisfazem á equação

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n = n.$$

Derivando esta igualdade e pondo $x = 0$, vem (n.º 79—I)

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{(n!)^2 a_0^{h_0}a_1^{h_1}a_2^{h_2}\ldots a_n^{h_n}}{h_0!\,h_1!\,h_2!\ldots h_n!},$$

onde o sommatorio se refere agora a todos os valores inteiros positivos de h_1, h_2, etc. que satisfazem ás equações

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n = n,\; h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + nh_n = n.$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de achar, devem ser identicos, quaesquer que sejam os valores de a_0, a_2, a_2, etc.; portanto vem

$$\alpha = h_1,\ \beta = h_2,\ \ldots \gamma = h_n,\ h_0 = n - i = n - (\alpha + \beta + \ldots + \lambda),$$

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}.$$

Temos pois a formula (*)

$$(3) \qquad y^{(n)} = \Sigma \frac{n!\,\frac{d^i y}{du^i}(u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\lambda!(2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores de α, β, γ, ..., λ que satisfazem á equação:

$$\alpha + 2\beta + 3y + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda.$$

Nota 1.ª — A respeito dos coefficientes numericos

$$A = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda}$$

faremos algumas observações (**)

1.° — *Estes coefficientes são numeros inteiros.*

Esta propriedade resulta da demonstração precedente, e constitue um theorema interessante de Arithmetica a que o sr. Weil chegou por considerações relativas á theoria das combinações. (***)

2.° — Sendo $y = u^k$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{dy}{du} = ku^{k-1},\ \frac{d^2y}{du^2} = k(k-1)u^{k-2},\ \ldots,\ \frac{d^ky}{du^k} = k!,$$

$$\frac{d^{k+1}y}{du^{k+1}} = 0,\ \ldots,\ u' = u'' = \ldots = e^x;$$

e, pondo $x = 0$,

(*) Veja-se o nosso artigo *Sur les dérivées d'ordre quelconque* publicado no tomo XVIII do *Giornale di Matematiche* de Napoles, d'onde é tirada a demonstração precedente da formula (3).

(**) Veja-se o nosso artigo — *Ueber einen Satz der Zahlentheorie* publicado nos *Archiv der Mathematik und Physik* de Leipzig (1885).

(***) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* — tomo XCII.

$$\left(\frac{dy}{du}\right)_0 = 0, \ldots, \left(\frac{d^k y}{du^k}\right)_0 = k\,!\,, \ldots$$

$$u'_0 = u''_0 = \ldots = 1\,.$$

Substituindo em (3), vem a formula seguinte de que adiante faremos uzo:

$$\frac{1}{k\,!}\left(\frac{d^n\,(e^x - 1)^k}{dx^n}\right)_0 = \Sigma' A\,,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da formula (3) que correspondem ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = k.$$

3.° — Sendo $y = e^u$, $u = e^x - 1$, teremos

$$\frac{d^i y}{du^i} = e^u,\ u' = u'' = \ldots = e^x,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^i y}{du^i}\right)_0 = 1,\ u' = u'' = \ldots = 1\,.$$

Logo, applicando (3), virá a formula

$$\left(\frac{d^n\left(e^{e^x - 1}\right)}{dx^n}\right)_0 = \Sigma A\,,$$

que dá a somma de todos os coefficientes da formula (3).

4.° — O quociente $\frac{\Sigma A}{n\,!}$ tende para o limite zero quando n augmenta indefinidamente. (*)

Com effeito, derivando a funcção $y = e^{e^x - 1}$, vem a igualdade

(*) Oliveira Ramos e C. J. de Faria — *Sobre os coefficientes* etc. (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomo VII).

$$y' = ye^x,$$

cujas derivadas d'ordem $n - 2$ e $n - 1$ dão, pondo $x = 0$,

$$y_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} y_0^{(i)}, \; y_0^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)}.$$

Separando na segunda igualdade o termo correspondente a $i = n - 1$, vem

$$y_0^{(n)} = y_0^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)},$$

e portanto

$$\frac{y_0^{(n)}}{y_0^{(n-1)}} = 1 + \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)}}{\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} y_0^{(i)}}.$$

A fracção que entra no segundo membro está comprehendida (em virtude de um theorema bem conhecido de Arithmetica) entre o maior e o menor valor da fracção

$$\frac{\binom{n-1}{i}}{\binom{n-2}{i}} = \frac{n-1}{n-1-i},$$

isto é, entre $n - 1$ e 1. Logo temos

$$\frac{y_0^{(n)}}{y_0^{(n-1)}} < n,$$

ou

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} < \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!},$$

o que mostra que $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ decresce quando n augmenta.

Por ser $\frac{y_0''}{2!} = 1$, e portanto $\frac{y_0^{(n)}}{n!} < 1$ quando n è maior do que 2, temos

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} y_0^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-i)!} \cdot \frac{y_0^{(i)}}{i!}$$

$$< \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1-i)!};$$

mas a somma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-1-i} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}$$

converge (n.º 12) para um limite L; logo teremos

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} < \frac{L}{n},$$

que dá, para $n = \infty$,

$$\lim \frac{y_0^{(n)}}{n!} = 0.$$

Observando agora que é $\frac{y_0^{(n)}}{n!} = \frac{\Sigma A}{n!}$, temos o theorema enunciado.

Nota 2.ª — Applicando a formula (3) ás funcções

$$y = u^k, \; u = \varphi(x)$$

vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n!\,k(k-1)\ldots(k-i+1)\,u^{k-i}\,(u')^\alpha\,(u'')^\beta\ldots(u^{(n)})^\lambda}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\lambda!\,(2!)^\beta\,\ldots\,(n!)^\lambda}$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n;$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Nota 3.ª — Sendo

$$y = f(u),\ u = a + bx$$

acha-se, ou directamente, ou por meio da formula (3):

$$y^{(n)} = b^n \frac{d^n y}{du^n}.$$

V — Seja

$$y = f(u_1, u_2, \ldots, u_l),\ u_1 = \varphi_1(x),\ u_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ u_l = \varphi_l(x),$$

e procuremos a derivada $y^{(n)}$ de y relativamente a x.

Para resolver esta questão seguiremos o mesmo caminho que no nosso artigo publicado no *Giornale di Matematiche* (tomo XVIII), que passamos a expôr.

Temos

$$y' = \frac{\partial f}{\partial u_1} u'_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} u'_2 + \ldots$$

$$y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} (u'_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} u'_1 u'_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_1} u''_1 + \ldots$$

....

Vê-se facilmente que a derivada de ordem n é uma somma da fórma:

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} = \Sigma A \dfrac{\partial^m f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \ldots} (u'_1)^{\alpha} (u''_1)^{\beta} \ldots (u_1^{(n)})^{\lambda} \\ \times (u'_2)^{\alpha'} (u''_2)^{\beta'} \ldots (u_2^{(n)})^{\lambda'} \times \ldots, \end{array} \right.$$

onde

$$m = a + b + c + \ldots,$$

e onde A, a, b, ..., α, β, ..., α', β', ... são numeros inteiros que vamos determinar. Para isso appliquemos esta formula ás funcções:

$$y = u_1^n \, u_2^n \ldots u_l^n$$

$$u_1 = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$u_2 = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$$

....

onde a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... representam constantes arbitrarias, o que dá

$$y^{(n)} = \Sigma A n(n-1)\ldots(n-a+1) \times n(n-1)\ldots(n-b+1) \times \ldots$$

$$\times\, u_1^{n-a} (u'_1)^{\alpha} (u_1'')^{\beta} \ldots \times u_2^{n-b} (u'_1)^{\alpha'} \ldots,$$

e pondo $x = 0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} A n(n-1)\ldots(n-a+1) \times n(n-1)\ldots(n-b+1) \times \ldots \\ \times\, (2\,!)^{\beta+\beta'+\ldots} \, (3\,!)^{\gamma+\gamma'+\ldots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\ldots} \\ \times\, a_0^{n-a} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots \times b_0^{n-b} b_1^{\alpha'} b_2^{\beta'} \ldots \times \ldots \end{array} \right\}$$

Por outra parte, applicando a formula de Leibnitz ao producto considerado, vem

$$y^{(n)} = \Sigma \frac{n\,!}{h_1\,!\, h_2\,! \ldots h_n\,!} (u_1^n)^{(h_1)} (u_2^n)^{(h_2)} \ldots,$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros e positivos de h_1, h_2, etc. que satisfazem á equação

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_l = n;$$

ou, substituindo as derivadas $(u_1^n)^{(h_1)}$, $(u_2^n)^{(h_2)}$, etc. (n.º 79 — IV — *nota* 2.ª) pelos seus valores e pondo $x = 0$,

$$y_0^{(n)} = \Sigma \frac{n!\, n(n-1) \ldots (n-a+1)\, n(n-1) \ldots (n-b+1) \ldots}{\alpha\,!\, \beta\,! \ldots \lambda\,!\, \alpha'\,!\, \beta'\,! \ldots \lambda'\,! \ldots}$$

$$a_0^{n-a}\, a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta} \ldots \times b_0^{n-b}\, b_1^{\alpha'}\, b_2^{\beta'} \ldots \times \ldots$$

onde o sommatorio se refere aos valores inteiros e positivos de α, β, ..., α' β', ... que satisfazem ás equações

$$\alpha + 2\beta + \ldots + h_1 \lambda = h_1.$$

$$\alpha' + 2\beta' + \ldots + h_2 h' = \lambda_2,$$

....

$$\alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + h_l \lambda^{(l-1)} = h_l,$$

isto é, á equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \ldots$$

$$+ \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.\ b = \alpha' + \beta' + \ldots + \lambda', \text{etc.}$$

Os dois valores de $y_0^{(n)}$ que vimos de obter, devem ser identicos qualquer que seja o valor das quantidades a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ...; portanto os inteiros α, β, ..., α', β', ... devem ter os mesmos valores nas duas expressões de $y^{(n)}$, e deve ser

$$A = \frac{n\,!}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda! \times \alpha'!\, \beta'! \ldots \lambda'! \times \ldots \times (2!)^{\beta+\beta' \ldots} \ldots (n!)^{\lambda+\lambda'+\ldots}}$$

Estão pois determinadas as constantes que entram na formula (b), e temos a formula seguinte, que resolve a questão proposta:

$$(4) \quad y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\times\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\times\ldots} \cdot \dfrac{\partial^m f}{\partial u_1^a \partial u_2^b \ldots} \\ \times (u'_1)^\alpha \left(\dfrac{u_1''}{2!}\right)^\beta \ldots \left(\dfrac{u^{(n)}}{n!}\right)^\lambda \times (u'_2)^{\alpha'} \ldots \left(\dfrac{u_2^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'} \times \ldots \end{array} \right.$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda + \alpha' + 2\beta' + \ldots + n\lambda' + \alpha^{(l-1)} + 2\beta^{(l-1)} + \ldots + n\lambda^{(l-1)} = n,$$

e onde é

$$a = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,\ b = \alpha' + \ldots + \lambda',\ \text{etc.},$$

e

$$m = a + b + c + \ldots$$

VI — Consideremos agora a funcção implicita y definida pela equação

$$f(x, y) = 0 .$$

Temos as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

....

por meio das quaes se obtém successivamente y', y'', etc.

A lei d'estas equações obtem-se applicando á funcção $f(x, y)$ a formula (4), pondo $u_2 = x$, $u_1 = y$ e considerando y como funcção de x, o que dá

$$(5) \quad \Sigma \frac{n!}{\alpha'!\,\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial x^{\alpha'} \partial y^{m-\alpha'}} (y')^\alpha (y'')^\beta \ldots (y^{(n)})^\lambda = 0,$$

onde o sommatorio se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha' + \alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n,$$

e onde é

$$m = \alpha' + \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

A formula que precede dá a derivada de ordem n em funcção das anteriores. A formula que dá directamente $y^{(n)}$ é muito complicada e porisso não a exporemos aqui. (*)

II

Applicações

80. — *Derivada do arc (tang = x)*. — **I** — A funcção

$$y = \text{arc}\,(\text{tang} = x)$$

dá

$$y' = (1 + x^2)^{-1},$$

d'onde se deduz (n.º 79 — IV)

$$y^{(n)} = \Sigma\,(-1)^i \cdot \frac{(n-1)\,!\; i\,!\; (2x)^\alpha\, (1 + x^2)^{-1-i}}{\alpha\,!\; \beta\,!}$$

onde

$$\alpha + 2\beta = n - 1,\; i = \alpha + \beta;$$

(*) Vid. Duarte Leite — *Sobre as derivadas* etc. (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomo IV).

$$y^{(n)} = \Sigma \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n-1-\beta} \dfrac{(n-1)!\,(n-1-\beta)!}{(n-1-2\beta)!\,\beta!} \times \\ \times (2x)^{n-1-2\beta} (1+x^2)^{\beta-n} \end{array} \right.$$

onde o sommatorio se refere a todos os valôres inteiros e positivos de β desde zero até ao maior inteiro contido em $\dfrac{n-1}{2}$.

II — Se quizermos o valor de $y_0^{(n)}$ poremos $x = 0$ na formula precedente.

1.° — Se n é *impar*, todos os termos da formula se annullam, excepto aquelle que corresponde a $n - 1 - 2\beta = 0$; e teremos portanto

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!\,.$$

2.° — Se n é *par*, o expoente $n - 1 - 2\beta$ não póde ser nullo, e portanto teremos

$$y_0^{(n)} = 0\,.$$

81. — *Numeros de Bernoulli.* — **I** — Consideremos a funcção

$$y = (1 + e^x)^{-1},$$

e procuremos primeiro o valôr que toma $y^{(n)}$ quando é $x = 0$.

Pondo

$$\varphi(x) = y - \tfrac{1}{2} = \frac{1 - e^x}{2(1 + e^x)}$$

vem

$$\varphi(-x) = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)},$$

e portanto

$$\varphi(x) = -\varphi(-x),$$

e

$$\varphi'(x) = \varphi'(-x),\ \varphi'(x) = -\varphi''(-x), \text{ etc.}$$

Estas igualdades mostram que as derivadas de ordem par de $\varphi(x)$ se devem anullar quando se faz $x=0$, porque, se assim não fosse, teriam dois valores differentes para $x=0$, o que evidentemenle não póde ter logar.

As derivadas de y são iguaes ás derivadas de $\varphi(x)$, e portanto temos

$$y_0^{(n)}=0,$$

quando n é *par*.

As derivadas d'ordem impar acham-se pondo $x=0$ na formula (n.º 79 — IV)

$$y^{(n)}=\Sigma(-1)^i\frac{n\,!\,i\,!\,e^{ix}(1+e^x)^{-i-1}}{\alpha\,!\,\beta\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^\beta(3\,!)^\gamma\dots(n\,!)^\lambda}$$

onde

$$\alpha+2\beta+\dots+n\lambda=n,\ i=\alpha+\beta+\dots+\lambda;$$

o que dá

$$y_0^{(n)}=\Sigma(-1)^i\cdot\frac{n\,!\,i\,!}{2^{i+1}\,\alpha\,!\,\beta\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^\beta(3\,!)^\gamma\dots(n\,!)^\lambda}.$$

Os *numeros de Bernoulli* B_n definem-se pela igualdade

$$(a)\qquad B_n=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}-1}\,y_0^{(n)};$$

de modo que *são nullos quando n é par*, e quando n é impar podem ser calculados por meio da formula (*):

$$(6)\quad B_n=(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{(n+1)\,!}{2^{n+1}-1}\Sigma(-1)^i\frac{i\,!}{2^{i+1}\,\alpha!\,\beta!\dots\lambda!(2!)^\beta\dots(n!)^\lambda}$$

(*) Veja-se o nosso artigo — *Sur les nombres de Bernoulli* publicado no *American Journal of Mathematics* de Baltimcre — tomo VII.

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots + n\lambda = n$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \ldots \lambda.$$

II — De ser

$$\frac{n\,!}{\alpha\,!\;\beta\,!\;\ldots\;\lambda\,!\;(2\,!)^{\beta}\;\ldots\;(n\,!)^{\lambda}}$$

um numero inteiro (n.º 79 — IV) resulta que *os numeros de Bernoulli não podem conter em denominador factores primos differentes de 2 e dos factores primos de* $2^{n+1} - 1$, *e que 2 não póde entrar em denominador com expoente superior a* n.

III — Da formula (6) vamos tirar outra mais propria para o calculo dos numeros de Bernoulli.

Com effeito, aquella formula dá

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} \Bigg[(-1)^i \cdot \frac{i\,!}{2^{i+1}}$$

$$\times \Sigma' \frac{n\,!}{\alpha\,!\;\beta\,!\;\ldots\;\lambda\,!\;(2\,!)^{\beta}\;\ldots\;(n\,!)^{\lambda}}\Bigg],$$

onde o sommatorio Σ' se refere a todas as soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \ldots n\lambda = n$$

que dão a i o mesmo valor; e portanto (n.º 79 — IV = *nota 1.ª*)

$$B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \left(\frac{d^n (e^x - 1)^i}{dx^n}\right)_0,$$

ou, substituindo a derivada que entra no segundo membro pelo valôr que se obtém desenvolvendo o binomio $(e^x - 1)^i$ e derivando n vezes o resultado,

$$(7)\quad B_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}-1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \Big[i^n - i(i-1)^n + \binom{i}{2}(i-2)^n - \binom{i}{3}(i-3)^n + \dots \Big].$$

Ou por meio d'esta formula, ou por meio da formula (6) obtem-se

$$B_1 = \tfrac{1}{6},\ B_3 = \tfrac{1}{30},\ B_5 = \tfrac{1}{42},\ B_7 = \tfrac{1}{30},\ B_9 = \tfrac{5}{66},\ \dots$$

IV — Derivando n vezes a igualdade

$$y\,(e^x + 1) = 1$$

vem

$$y^{(n)}(e^x + 1) + e^x \left(n y^{(n-1)} + \binom{n}{2} y^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1} y' + y \right) = 0 .$$

Pondo $x = 0$, e attendendo á formula (a), resulta

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2\,\frac{2^{n+1}-1}{n+1} B_n + (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot n\,\frac{2^n-1}{n} B_{n-1} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2} \frac{2^{n-1}-1}{n-1} B_{n-2} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{3} \frac{2^{n-2}-1}{n-2} B_{n-3} + \dots + (-1)\binom{n}{n-1}\frac{2^2-1}{2} B_1 + \tfrac{1}{2} = 0$$

que, pondo $n = 2p - 1$, dá

$$2\,\frac{2^{2p}-1}{p}\,B_{2p-1} - \binom{2p-1}{2}\frac{2^{2(p-1)}-1}{p-1}\,B_{2p-3} + \dots$$
$$\pm\binom{2p-1}{2p-2}\frac{2^2-1}{1}\,B_1 \mp 1 = 0;$$

e, pondo $n = 2p$, dá

$$2p\,\frac{2^{2p}-1}{p}\,B_{2p-1} - \binom{2p}{3}\frac{2^{2p-2}-1}{p-1}\,B_{2p-3} + \dots$$
$$\pm\binom{2p}{2p-1}\frac{2^2-1}{1}\,B_1 \mp 1 = 0.$$

Temos assim duas relações *lineares recorrentes* entre os numeros de Bernoulli, por meio de qualquer das quaes se póde calcular successivamente B_1, B_3, B_5, etc.

V — Os numeros de Bernoulli apparecem em muitas questões d'Analyse. Assim, por exemplo, os valores das derivadas da funcção

$$y = \frac{x}{e^x - 1}$$

correspondentes a $x = 0$ exprimem-se em funcção d'estes numeros

Com effeito, derivando n vezes a igualdade

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{e^x-1} - \frac{2x}{e^{2x}-1} = y - \frac{2x}{e^{2x}-1}$$

vem (n.º 79 — II) (pondo $y = f(x)$) a equação

$$x\,\frac{d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^n} + n\,\frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}{dx^{n-1}} = f^n(x) - 2^n f^n(2x)$$

que, pondo $x = 0$ e attendendo á formula (a), dá

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} B_{n-1}\,.$$

Notas. — Vê-se por esta formula que as derivadas de ordem impar de y são nullas.

2.ª — A formula que precede não dá os valores de y_0 e y'_0. Para os achar, parte-se da equação

$$(e^x - 1)\,y = x$$

que dá

$$(e^x - 1)\,y' + e^x y = 1$$

$$(e^x - 1)\,y'' + 2e^x y' + e^x y = 0$$

e, pondo $x = 0$,

$$y_0 = 1,\ y'_0 = -\tfrac{1}{2}\,.$$

VI — Do mesmo modo a funcção

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

dá para valôr de $y_0^{(n)}$

$$y_0^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} B_n\,.$$

que é *nullo* quando n é *par*.

VII — Consideremos finalmente uma questão d'Algebra em que entram os numeros de Bernoulli.

Seja

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1}\,,$$

e portanto

$$xy = (e^{nx} - 1) \cdot \frac{x}{e^x - 1}.$$

Derivando $k + 1$ vezes esta igualdade e pondo $z = \frac{x}{e^x - 1}$, vem

$$xy^{(k+1)} + (k+1)\, y^{(k)} = n^{k+1} e^{nx} z + (k+1)\, n^k e^{nx} \cdot z'$$

$$+ \binom{k+1}{2} n^{k-1} e^{nx} z'' + \ldots + \binom{k+1}{k} n e^{nx} z^{(k)}$$

$$+ (e^{nx} - 1)\, z^{(k+1)},$$

e, pondo $x = 0$,

$$y_0^{(k)} = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} - \frac{kn^{k-1}}{2} B_1$$

$$+ k(k-1)(k-2)\, n^{k-3} \cdot \frac{B_3}{4!} + \ldots$$

Por outra parte, derivando k vezes y, vem

$$y_0^{(k)} = e^x + 2^k e^{2x} + \ldots + (n-1)^k e^{(n-1)x},$$

e portanto

$$y_0^{(k)} = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k.$$

Temos pois a formula

$$1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} - k\,\frac{n^{k-1}}{2} B_1$$

$$+ k(k-1)(k-2)\, n^{k-3} \cdot \frac{B_3}{4} + \ldots$$

que dá o desenvolvimento ordenado segundo as potencias de n da somma dos $n - 1$ primeiros numeros inteiros.

82. — *Formula de Jacobi.* — Procuremos a derivada de ordem $n-1$ da funcção

$$y=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Applicando a formula (3), vem

$$y^{(n-1)}=\Sigma\,\frac{(n-1)!\,(n-\frac{1}{2})\ldots(n-\frac{1}{2}-i+1)\,(-2x)^{\alpha}\,(-2)^{\beta}\,(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}-i}}{\alpha\,!\;\beta\,!\;(2\,!)^{\beta}}$$

onde

$$\alpha+2\beta=n-1,\; i=\alpha+\beta\,;$$

ou

$$y^{(n-1)}=\Sigma\,\frac{(-1)^{n-1-\beta}(n-1)!(2n-1)\ldots(2\beta+3)x^{n-1-2\beta}(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(n-1-2\beta)!\beta!2^{\beta}}$$

$$=(-1)^{n-1}\,.\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{n}\,\Sigma\,(-1)^{\beta}.\,\frac{n\,!\;x^{n-1-2\beta}\,(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2\beta+1)\,(n-1-2\beta)!\,\beta!\,2^{\beta}},$$

que, por ser

$$2^{\beta}\times 1\,.\,2\,.\,3\ldots\beta\times 1\,.\,3\ldots(2\beta+1)=(2\beta+1)\,!\,,$$

dá

$$y^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\,.\,\frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}{n}$$

$$\times\,\Sigma\,(-1)^{\beta}\,.\,\frac{(n-2\beta)\,\ldots\,nx^{n-1-2\beta}\,(1-x^2)^{\beta+\frac{1}{2}}}{(2\beta+1)\,!}.$$

Pondo $x=\cos\omega$, vem

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{n}$$

$$\Sigma\,(-1)^{\beta} \cdot \frac{(n-2\beta)\ldots n \cos^{n-1-2\beta}\omega \operatorname{sen}^{\beta+\frac{1}{2}}\omega}{(2\beta+1)\,!}$$

ou; em virtude de uma formula bem conhecida de Trigonometria,

$$y^{(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots (2n-1)}{n} \cdot \operatorname{sen} n\,(\text{arc.} \cos = x),$$

resultado devido a Jacobi.

83. — *Derivadas das funcções compostas de funcções lineares de x.* — Seja na formula (4)

$$u_1 = A_1 + B_1\,x,\; u_2 = A_2 + B_2\,x,\; \ldots,\; u_l = A_l + B_l\,x\;;$$

teremos

$$y^{(n)} = \Sigma\,\frac{n\,!}{\alpha\,!\,\alpha'\,!\ldots\alpha^{(l-1)}!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial u_1^{\ \alpha}\,\partial u_2^{\ \alpha'}\ldots}\,B_1^{\ \alpha}\,B_2^{\ \alpha'}\ldots,$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \alpha^{(l-1)} = n\,.$$

A formula que precede póde ser escripta *symbolicamente* da maneira seguinte:

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\,B_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\,B_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_l}\,B_l\right)^{(n)},$$

devendo depois do desenvolvimento substituir-se $(\partial f)^n$ por $\partial^n f$.

III

Differenciaes d'ordem superior

84. — A differencial dy de $y = f(x)$, que está ligada com a derivada de y pela equação

$$dy = y' \, dx,$$

é uma funcção de x, cuja differencial $d\,(dy)$, que se representa por d^2y, se obtém differenciando o producto $y'dx$, o que dá

$$d^2y = y'' \, dx^2,$$

suppondo dx constante qualquer que seja x, o que é sempre possivel visto que x representa a variavel independente, e que portanto o seu augmento dx é arbitrario.

No mesmo modo se acha

$$d^3y = y''' \, dx^3$$

$$d^4y = y^{(4)} \, dx^4$$

. . . .

As differenciaes dy, d^2y, d^3y, etc. téem respectivamente os nomes de *differenciaes de primeira ordem*, de *segunda ordem*, etc. de y.

85. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes

$$z = f(x, y),$$

cuja *differencial total* se define (n.° 57) pela igualdade

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Esta differencial dz é uma funcção de x e y, que, sendo differenciada, dá a *differencial total de segunda ordem:*

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 ,$$

ou *symbolicamente*

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^{(2)} .$$

Continuando do mesmo modo acha-se, por inducção, a formula symbolica

$$d^nz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^{(n)} ,$$

que se demonstra por meio de um calculo análogo ao do n.º 79 — II.

Do mesmo modo, no caso da funcção de muitas variaveis

$$z = f(x_1, x_2, \dots x_l)$$

se acha

$$d^nz = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_l} dx_l\right)^{(n)} .$$

IV

Relações entre as funcções e suas derivadas

86. — *Theorema I. — Se as funcções $f(x)$ e $F(x)$ e as suas derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ..., $F^m(x)$ forem finitas e determinadas no intervallo de x_0 a x, teremos a relação:*

$$\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^l}{l!}f^l(x_0)}{F(x)-F(x_0)-(x-x_0)F'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2!}F''(x_0)-\ldots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}F^k(x_0)}$$

$$=\frac{\frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!}f^{l+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(x_0)+R_n}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{k+1}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}F^{m-1}(x_0)+R_m}$$

onde

$$R_n=\frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^n[x_0+\theta(x-x_0)]$$

$$R_m=\frac{(x-x_0)^m(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}F^m[x_0+\theta(x-x_0)],$$

θ representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade (*).

Para demonstrar este theorema appliquemos á funcção

(*) Este theorema é extraído do nosso artigo *Sur une formule d'Analyse* publicado nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* de Paris (tomo v da 3.ª série).

$$\varphi(z) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)$$

$$- f(z) - (x - z) f'(z) - \ldots - \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(z)$$

$$- \Big[F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)$$

$$- F(z) - (x - z) F'(z) - \ldots \frac{(x - z)^{m-1}}{(m-1)\,!} F^{m-1}(z)\Big] \times$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)}$$

a formula conhecida (n.º 49 — III)

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x - x_0) \varphi'[x_0 + \theta(x - x_0)];$$

o que dá, suppondo $n \mathrel{\overline{\overline{>}}} l + 1$ e $m \mathrel{\overline{\overline{>}}} k + 1$,

$$0 = - \frac{(x - x_0)^{l+1}}{(l+1)\,!} f^{l+1}(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(x_0)$$

$$- \Big[- \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)\,!} F^{k+1}(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)\,!} F^{m-1}(x_0)\Big]$$

$$\times \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - (x - x_0) F'(x_0) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)}$$

$$+ (x - x_0) \Big\{ - \frac{(x - x_0)^{n-1} (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^n[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{m-1} (1 - \theta)^{m-1}}{(m-1)\,!} F^m[x_0 + \theta(x - x_0)] \frac{f(x) - \ldots - \frac{(x - x_0)^l}{l\,!} f^l(x_0)}{F(x) - \ldots - \frac{(x - x_0)^k}{k\,!} F^k(x_0)}$$

D'esta formula tira-se o theorema enunciado.

Theorema II. — *Se as funcções* $f(x), f'(x), \ldots, f^n(x)$ *forem finitas e determinadas no intervallo de* x_0 *a* x *teremos*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

θ *representando uma quantidade positiva comprehendida entre zero e a unidade.*

A formula precedente, conhecida pelo nome de *formula de Taylor*, do nome do geometra que a descobriu (*), pode-se deduzir do theorema anterior pondo

$$F(x) = (x - x_0)^m, \; k = m - 1, \; l = n - 1,$$

e por consequencia,

$$F(x_0) = 0, \; F'(x_0) = 0, \; \ldots, \; F^{m-1}(x_0) = 0,$$

$$F^m(x_0) = m!, \; F^m[x_0 + \theta(x - x_0)] = m!\,.$$

A respeito d'esta formula faremos as seguintes observações:

1.° — A R_n chama-se *resto da formula* de Taylor. Da expressão d'este resto que vimos de achar e que é devida a Schlömilch (**), deduz-se, pondo $m = n$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n [x + \theta (x - x_0)],$$

(*) Taylor não deu a expressão de R_n. Foi Lagrange o primeiro geometra que deu uma expressão d'este resto.

(**) *Journal de Liouville*, 2.ª série, t. III.

devida a *Lagrange*; e, pondo $m = 1$, a formula

$$R_n = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n [x_0 + \theta (x - x_0)],$$

devida a *Cauchy*.

2.° — Se R_n tender para zero á medida que n tende para o infinito, a funcção $f(x)$ póde ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de $x - x_0$ por meio da formula

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n (x_0) + \ldots$$

3.° — Se na formula de Taylor pozermos $x_0 = 0$, vem a formula

$$f(x) = f(x_0) + x f'(x_0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!\, m} f^n (\theta x),$$

conhecida pelo nome de *formula de Maclaurin*.

4.° — *Se tiver logar o desenvolvimento em série*

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

e as funcções $f(0)$, $f'(0)$, ..., $f^n(0)$ *forem finitas e determinadas, será*

$$A_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Com effeito, pondo

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + x^{n+1} \varphi(x)$$

e derivando n vezes esta igualdade, vem

$$f^n(x) = n\,!\,A_n + x^{n+1}\varphi^n(x) + n(n+1)\,x^n\varphi^{n-1}(x) + \dots$$
$$+ (n+1)\,!\,x\,\varphi(x),$$

e portanto

$$f^n(0) = n\,!\,A_n.$$

87. — Consideremos agora a funcção de duas variaveis independentes:

$$z = f(x, y),$$

para estender a estas funcções a formula de Taylor.

Pondo

$$\varphi(t) = f[x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0)]$$

e applicando a formula de Maclaurin a esta funcção de t, vem

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\,\varphi'(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)\,!}\,\varphi^{n-1}(0) + R_n$$

$$R_n = \frac{t^n(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)\,!\,m}\,\varphi^n(\theta t).$$

Para calcular os coefficiente d'esta formula emprega-se a formula (n.º 83)

$$\varphi^i(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(y - y_0)\right]^{(i)}$$

(onde é $u_1 = x_0 + t(x - x_0)$ e $u_2 = y_0 + t(y - y_0)$) que, pondo $t = 0$ e notando que os valores das derivadas de $f(u_1, u_2)$ relativamente a u_1 e u_2 correspondentes a $t = 0$, são iguaes ás derivadas de $f(x_0, y_0)$ relativamente a x_0 e y_0, dá

$$\varphi^i(0) = \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_1, y_2)}{\partial y_0}(y - y_0)\right]^{(i)}.$$

A derivada que entra no resto é dada pela formula

$$\varphi^n(\theta t) = \left[\frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_2}(y - y_0)\right]^{(n)}$$

onde é

$$u_1 = x + \theta(x - x_0)t,\ u_2 = y + \theta(y - y_0)t.$$

Pondo agora nas formulas precedentes $t = 1$ vem a formula

$$z = f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!}\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}(y - y_0)\right]^{(i)}$$

$$+ \frac{(1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\,m}\left[\frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_1}(x - x_0) + \frac{\partial f(u_1, u_2)}{\partial u_2}(y - y_0)\right]^{(n)}$$

sendo agora

$$u_1 = x + \theta(x - x_0),\ u_2 = y + \theta(y - y_0),$$

que tem os mesmos usos que a formula de Taylor.

CAPITULO V

APPLICAÇÕES ANALYTICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Desenvolvimento em série de algumas funcções algebricas

88. — Consideremos em primeiro logar o binomio

$$y = (1 + x)^k,$$

onde k representa uma quantidade real qualquer.

Temos

$$y' = k(1 + x)^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)(1 + x)^{k-2}$$

. . . .

$$y^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-n+1)(1+x)^{k-n},$$

e portanto

$$y_0 = 1$$

$$y'_0 = k$$

....

$$y_0^{(n-1)} = k(k-1)\dots(k-n+2).$$

Logo applicando a formula de Maclaurin com a formula do resto de Cauchy, virá

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{k-n}.$$

1) Supponhamos primeiro que o valôr absoluto de x é inferior á unidade.

Como, cada vez que n augmenta de uma unidade, R_n adquire o factor

$$\left(\frac{k}{n}-1\right)x\frac{1-\theta}{1+\theta x},$$

onde é $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ e onde o factor $\left(\frac{k}{n}-1\right)x$ tende para o limite $-x$ quando n augmenta indefinidamente; haverá um valôr determinado de n a partir do qual o resto adquirirá indefinidamente factores inferiores á unidade. Logo o resto R_n tende para zero, e a série

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+2)}{(n-1)!} + \dots$$

converge para o limite $(1+x)^k$.

2) Se o valôr absoluto de x fôr superior á unidade, a série precedente será divergente, visto que, tendendo para o limite x a razão

$$\frac{k-n+1}{n}x = \left(\frac{k+1}{n}-1\right)x$$

de dous termos consecutivos da série, ha sempre um valôr de n a partir do qual esta razão se conserva indefinidamente maior do que a unidade (n.º 12 – 3.º).

89. — Do desenvolvimento em série do binomio, que vimos de obter, pode-se tirar o desenvolvimento em série de muitas outras funcções.

Assim, suppondo $f(x)$ uma funcção racional de x, da igualdade (n.º 27)

$$f(x) = \Sigma \frac{A}{(x-a)^k} = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-k}$$

tira-se o desenvolvimento em série

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{a} + A_2 \frac{x^2}{a^2} + \dots$$

onde é

$$A_0 = \Sigma (-1)^k \frac{A}{a^k}$$

$$A_1 = \Sigma (-1)^k \binom{k}{1} \frac{A}{a^k}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n = \Sigma (-1)^k \binom{k}{n} \frac{A}{a^k}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

quando x é uma quantidade real cujo valôr absoluto é inferior ao menor dos módulos das quantidades designadas por a.

90. — Desenvolvamos agora a funcção

$$y = (1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

em série ordenada segundo as potencias de u.

Pondo esta funcção debaixo da fórma

$$y = (u - u_1)^{-\frac{1}{2}} (u - u_2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -(u_1 u_2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{u_2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

onde u_1 e u_2 representam as raizes da equação

$$u^2 - 2ux + 1 = 0,$$

vê-se que ella é susceptivel de ser desenvolvida em série convergente ordenada segundo as potencias de u, quando o valôr absoluto de u é inferior ao de u_1 e u_2; e então temos um resultado da fórma

$$y = X_0 + X_1 u + X_2 u^2 + \ldots + X_k u^k + \ldots$$

onde X_0, X_1, etc. representam funcções de x que vamos determinar.

Por ser (n.º 79 — IV)

$$y^{(k)} = \Sigma \frac{k!(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\ldots(-\frac{1}{2}-i+1)(-2x+2u)^\alpha 2^\beta y^{-\frac{1}{2}-i}}{\alpha!\,\beta!\,2^\beta}$$

$$= \Sigma (-1)^\beta . \frac{k!\,1.3.5\ldots(2i-1)(x-u)^\alpha y^{-\frac{1}{2}-i}}{\alpha!\,\beta!\,2^\beta}$$

onde

$$\alpha + 2\beta = k,\ i = \alpha + \beta,$$

teremos

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!} = \Sigma (-1)^\beta . \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{\alpha!\,\beta!\,2^\beta} x^\alpha,$$

ou, eliminando α,

$$X_k = \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta . \frac{1.3.5\ldots(2k-2\beta-1)}{(k-2\beta)!\,\beta!\,2^\beta} x^{k-2\beta}.$$

Esta formula serve para calcular os polynomios X_k, conhecidos pelo nome de *polynomios de Legendre*, do nome do geometra celebre que primeiro os considerou. Vamos estudar algumas das suas propriedades mais elementares.

I — Derivando k vezes a identidade

$$(x^2-1)^k = \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} x^{2k-2\beta}$$

vem

$$\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} = \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} (2k-2\beta)\ldots(k-2\beta+1)\, x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta \binom{k}{\beta} . \frac{(2k-2\beta)\,!}{(k-2\beta)\,!}\, x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta . \frac{k\ldots(k-\beta+1)\times 1.3\ldots(2k-2\beta-1)\times 2.4\ldots(2k-2\beta)}{\beta\,!\,(k-2\beta)\,!}\, x^{k-2\beta}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^\beta . \frac{1.3\ldots(2k-2\beta-1)\,2^{k-\beta}\,k\,!}{\beta\,!\,(k-2\beta)\,!}\, x^{k-2\beta} .$$

Comparando esta igualdade com a expressão de X_k anteriormente achada deduz-se a formula notavel

$$X_k = \frac{1}{2^k . k\,!} . \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k} .$$

II — Derivando a funcção

$$y = (1-2ux+u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

relativamente a u, vem

$$y' = (x-u)(1-2\,ux+u^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ou

$$y'(1 - 2ux + u^2) = (x - u)y .$$

Derivando agora k vezes esta equação, temos

$$y^{(k+1)}(1 - 2ux + u^2) + ky^{(k)}(-2x + 2u) + 2\binom{k}{2}y^{(k-1)} =$$

$$= y^{(k)}(x - u) - ky^{(k-1)}$$

e portanto, pondo $u = 0$,

$$y_0^{(k+1)} - (2k + 1)xy_0^{(k)} + k^2 y_0^{(k-1)} = 0 .$$

Esta equação, pondo

$$X_k = \frac{y_0^{(k)}}{k!},$$

dá

$$(k + 1)X_{k+1} - (2k + 1)x X_k + k X_{k-1} = 0 .$$

Temos assim uma relação *linear recorrente* entre tres polynomios consecutivos de Legendre, por meio da qual se póde formar successivamente estes polynomios a partir do terceiro.

III — Como a equação

$$(x^2 - 1)^k = 0$$

tem k raizes iguaes a $+1$ e k raizes iguaes a -1, a equação

$$\frac{d(x^2 - 1)}{dx} = 0$$

terá $k - 1$ raizes iguaes a $+1$, $k - 1$ raizes iguaes a -1, e (em virtude do theorema de Rolle) uma raiz real comprehendida entre $+1$ e -1.

Pela mesma razão a equação

$$\frac{d^2(x^2-1)}{dx^2}=0$$

terá $k-2$ raizes iguaes a $+1$, $k-2$ raizes iguaes a -1 e duas raizes desiguaes comprehendidas entre $+1$ e -1.

Continuando o mesmo raciocinio conclue-se emfim que *a equação $X_k=0$ tem k raizes reaes e desiguaes comprehendidas entre $+1$ e -1.*

IV — Pondo

$$(x^2-1)^k=z$$

temos

$$k\log(x^2-1)=\log z\,,$$

e, derivando,

$$(x^2-1)\,z'-2k\,xz=0\,.$$

Derivando $k+1$ vezes esta equação, vem

$$(x^2-1)\,z^{(k+2)}+2\,(k+1)\,xz^{(k+1)}+k\,(k+1)\,z^{(k)}$$
$$-\,2k\,[xz^{(k+1)}+(k+1)\,z^{(k)}]=0\,,$$

ou, pondo $z^{(k)}=2^k\,k\,!\,X_k$ e fazendo as reducções,

$$(x^2-1)\,X''_k+2x\,X'_k-k\,(k+1)\,X_k=0\,.$$

Os polynomios de Legendre são pois soluções d'uma equação differencial linear de segunda ordem.

V — Da relação entre taes polynomios de Legendre consecutivos (II) vamos tirar o limite para que tende a razão

$$\frac{X_k}{X_{k+1}}=A_k$$

quando k augmenta indefinidamente.

Pondo primeiro n'esta relação $k=h+h_0$ e dividindo por $(h+h_0)\,X_{h+h_0+1}$, vem

$$1 + \frac{1}{h+h_0} - \left(2 + \frac{1}{h+h_0}\right) x A_{h+h_0} + A_{h+h_0} . A_{h+h_0-1} = 0.$$

Consideremos em seguida a equação

$$1 - 2x B_{h+h_0} + B_{h+h_0} . B_{h+h_0-1} = 0$$

que determina uma série de funcções B_0, B_1, etc., dada uma d'ellas, que supporemos ser B_{h_0} e ser igual A_{h_0}.

Chamando z_1 e z_2 as raizes da equação

$$1 - 2x z + z^2 = 0,$$

e notando que é $z_1 + z_2 = 2x$, $z_1 z_2 = 1$, podemos escrever a equação precedente debaixo da fórma

$$B_{h+h_0} B_{h+h_0-1} - B_{h+h_0}(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0,$$

ou, multiplicando todos os termos por $z_2 - z_1$,

$$B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_2 - B_{h+h_0} z_2^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1 z_2^2$$

$$= B_{h+h_0-1} B_{h+h_0} z_1 - B_{h+h_0} z_1^2 - B_{h+h_0-1} z_1 z_2 + z_1^2 z_2$$

ou

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{B_{h+h_0-1} - z_1}{B_{h+h_0-1} - z_2}.$$

Mudando n'esta equação successivamente h em $h - 1$, $h - 2$, ... 2, 1 vem uma série de equações dos quaes se deduz

$$\frac{B_{h+h_0} - z_1}{B_{h+h_0} - z_2} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h . \frac{B_{h_0} - z_1}{B_{h_0} - z_2}.$$

$$= \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^h . \frac{A_{h_0} - z_1}{A_{h_0} - z_2}.$$

Esta equação mostra que B_{h+h_0} tende para o limite z_1 quando h augmenta indefinidamente, se o valôr absoluto de z_2 é maior do que o valôr absoluto de z_1; e que B_{h+h_0} tende para o limite z_2, se o valôr absoluto de z_2 é menos do que o de z_1.

Por outra parte, as igualdades

$$A_{h_0+1} = \frac{1+\frac{1}{h_0+1}}{\left(2+\frac{1}{h_0+1}\right)x - A_{h_0}} = \frac{1+\frac{1}{h_0+1}}{\left(2+\frac{1}{h_0+1}\right)x - B_{h_0}}$$

$$A_{h_0+2} = \frac{1+\frac{1}{h_0+2}}{\left(2+\frac{1}{h_0+2}\right)x - A_{h_0+1}}$$

..............................,

e as igualdades

$$B_{h_0+1} = \frac{1}{2x - B_{h_0}}$$

$$B_{h_0+2} = \frac{1}{2x - B_{h_0+1}}$$

....

mostram que A_{h_0+1}, A_{h_0+2}, etc. tendem para os limites B_{h_0+1}, B_{h_0+2}, etc. quando h_0 augmenta indefinidamente.

Logo *a razão A_k de dous polynomios de Legendre consecutivos tenderá para aquella das quantidades $x+\sqrt{x^2-1}$ e $x-\sqrt{x^2-1}$ que tiver menor valôr absoluto, quando k augmenta indefinidamente* (*).

91. — Terminaremos o que temos a dizer sobre as funcções algebricas demonstrando um theorema notavel, devido ao eminente geometra allemão Eisenstein:

A série

(1) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

(*) Esta propriedade foi por nós publicada no nosso artigo — *Sur une limite relative aux polynômes de Legendre*, publicado nas *Actas da Sociedade Real das Sciencias da Bohemia* (1886).

onde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ representam fracções reduzidas á sua expressão mais simples, não póde ser o desenvolvimento de uma funcção y, definida por uma equação algebrica com coefficientes inteiros

$$(2) \qquad F(x, y) = 0,$$

se augmentar indefinidamente o numero dos factores primos differentes contidos nos denominadores de $a_0, a_1, a_2, \ldots$

A demonstração que vamos dar d'este theorema foi por nós publicada nos *Annales de l'École Normale supérieure de Paris* (3.ª série — tomo III) (*).

Notemos primeiro que, se a série (1) satisfaz á equação algebrica (2), tambem a série

$$y = k + a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

satisfará a uma equação algebrica que resulta de mudar na precedente y em $y - k$.

Posto isto, escrevamos esta ultima equação debaixo da fórma

$$(3) \qquad \Sigma A_a^{(b)} x^a . y^b = 0,$$

onde $A_a^{(b)}$, a, b representam numeros inteiros, e a e b são positivos; e derivemol-a n vezes (n.º 79 — II), o que dá o resultado symbolico

$$\Sigma A_a^{(b)} (x^a + y^b)^{(n)} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} (x^a)^{(i)} (y^b)^{(n-i)} = 0,$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} \binom{n}{i} a (a - 1) \ldots (a - i + 1) x^{a-i} (y^b)^{(n-i)} = 0.$$

(*) No nosso artigo — *Ueber den Eisenstein'schen Satz* publicado nos *Archiv der Mathematik* de Leipzig (1886), démos uma demonstração do mesmo theorema fundada na formula (5) do n.º 79.

Pondo agora $x = 0$, vem

$$\Sigma A_a^{(b)} n (n-1) \ldots (n-a+1 (y^b)_0^{(n-i)} = 0$$

ou *symbolicamente*

$$\Sigma A_a^{(b)} n (n-1) \ldots (n-a+1) [y+y+\ldots]_0^{(n-a)} = 0$$

ou

$$\Sigma A_a^{(b)} n(n-1)\ldots(n-a+1) S \frac{(n-a)!\, y_0^{(\alpha)} y_0^{(\beta)} \ldots y_0^{(\lambda)}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!} = 0,$$

onde a somma S se refere a todas as soluções inteiras positivas da equação

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n - a.$$

Separemos n'esta equação os termos que contéem a derivada d'ordem mais elevada, para o que se deve dar a a o valor zero, e a α, β, ..., λ os systemas de soluções

$$\alpha = n, \beta = 0, \ldots, \lambda = 0$$

$$\alpha = 0, \beta = n, \ldots, \lambda = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \ldots, \lambda = n;$$

teremos

$$\Sigma A_a^{(b)} S \frac{y_0^{(\alpha)}}{\alpha!} \cdot \frac{y_0^{(\beta)}}{\beta!} \ldots \frac{y_0^{(\lambda)}}{\lambda!}$$

$$+ \Sigma A_0^{(b)} b (a_0 + k)^{b-1} \cdot \frac{y_0^{(n)}}{n!} = 0$$

ou, pondo

$$a_1 = y'_0,\ a_2 = \frac{y''_0}{2!},\ a_3 = \frac{y'''_0}{3!}, \text{ etc.},$$

e $k = -a_0$

$$A_0^{(1)} a_n = -\Sigma A_a^{(b)} S a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda.$$

Se $A_0^{(1)}$ é differente de zero, d'esta igualdade tira-se immediamente que a_n não póde conter em denominador factores primos differentes dos que entram nos denominadores dos coefficientes anteriores a_α, a_β, etc., e d'aquelles que entram em $A_0^{(1)}$. Logo o numero dos factores primos differentes que entram nos coefficientes da série (1) é limitado, como queriamos demonstrar.

Se porém é $A_0^{(1)} = 0$, a ultima equação da pagina anterior dá, separando os termos que contêem $y_0^{(n-1)}$,

$$1 \,.\, 2\, A_0^{(2)} a_{n-1} = -\Sigma A_a^{(b)} S a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda$$

d'onde se tira ainda, como no caso anterior, o theorema enunciado, se $A_0^{(2)}$ é differente de zero.

Continuando do mesmo modo demonstra-se completamente o theorema visto que as quantidades $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, etc. não podem ser todas nullas. Com effeito, se fossem todas nullas, a equação (3) pondo $x = 0$, daria $A_0^{(0)} = 0$ e portanto esta equação teria um factor commum x que se podia supprimir.

Nota. — Da demonstração precedente é facil de concluir o seguinte theorema mais geral do que o de Eisenstein:

Uma funcção, definida de uma maneira qualquer, que toma um valôr raccional y_0 *para* $x = 0$, *não póde satisfazer a uma equação algebrica com coefficientes inteiros, se augmentar indefinidamente o numero dos factores primos differentes contidos em* $y'_0, \frac{y''_0}{2\,!}, \frac{y'''_0}{3\,!}, \dots$

Em principios análogos se funda o theorema seguinte (*):

A série (1) *não póde ser o desenvolvimento de uma funcção definida por uma equação algebrica relativamente a* $x, y', \dots, y^{(i)}$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(i)}) = 0$$

(*) Este theorema e o anterior foram por nós publicados, nos tomos II, III e IV dos *Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.*

se os denominadores de a_n, a_{n+1}. *etc. contêem indefinidamente factores primos superiores respectivamente a* n, n+1, *etc.*

II

Desenvolvimento em série de algumas funcções trancendentes

92. — *Exponencial* — **I** — Principiemos pela funcção exponencial

$$y = e^x$$

que dá

$$y' = y'' = \dots = y^{(n)} = e^x$$

e portanto

$$y'_0 = y''_0 = \dots = y_0^{(n-1)} = 1.$$

Logo, applicando a formula de Maclaurin, vem

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}.$$

A exponencial $e^{\theta x}$ é finita qualquer que seja x, e o producto

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{n}$$

tendo para zero quando n tende para o infinito; logo R_n tende para zero quando n tende para o infinito, e temos o desenvolvimento em série

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots,$$

que tem logar qualquer que seja x.

II — Applicando a esta série o theorema de Eisenstein conclue-se que a funcção e^x é trancendente, visto que os coefficientes de x contéem um numero illimitado de factores primos differentes.

III — Pondo na formula (1) $x = 0$, vem

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots$$

Por esta série calcula-se o valôr de e mais rapidamente do que pelo processo do n.º 19.

Este numero e é irraccional. Com effeito, se e fosse igual a uma fracção $\frac{m}{n}$, teriamos

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots,$$

e portanto

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2\,!} - \ldots - \frac{1}{n\,!} = \frac{1}{(n+1)\,!} + \frac{1}{(n+2)\,!} + \ldots$$

$$< \frac{1}{n\,!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right]$$

ou

$$\frac{m}{n} - 2 - \frac{1}{2\,!} - \ldots - \frac{1}{n\,!} < \frac{1}{n\,!\,n},$$

ou

$$(n-1)\,!\,m - 2(n\,!) - \ldots - 1 < \frac{1}{n};$$

e portanto

*

$$(n-1)!\,m - 2(n!) - \ldots - 1 = \frac{\theta}{n},$$

onde $\theta < 1$.

Seria pois um inteiro igual a uma fracção, o que é absurdo.

Lambert demonstrou que todas as potencias inteiras de e são irracionaes, e modernamente o snr. Hermite demonstrou que este numero é trancendente, isto é, que não póde ser raiz de uma equação algebrica com coefficientes racionaes (*).

IV — Appliquemos agora a formula de Maclaurin á funcção

$$y = e^x + e^{-\frac{1}{x}},$$

considerada por Cauchy para mostrar a necessidade da discussão do resto, ainda que a série a que se chegue, quando n augmente indefinidamente, seja convergente; pois que póde esta série ser convergente e todavia o resto não tender para zero.

Derivando n vezes a funcção y, vem (n.º 79 — IV)

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma\, \frac{n!\,(x^{-2})^{\alpha}\,(-2x^{-3})^{\beta}\ldots}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,(2!)^{\beta}\ldots(n)^{\lambda}}\, e^{-\frac{1}{x}},$$

resultado da fórma

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma A\, \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a}.$$

onde A representa uma constante, e a è inteiro e positivo.

Pondo depois $\frac{1}{x} = z$, vem

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, tomo LXXVII.

$$y^{(n)} = e^x + \Sigma A \frac{z^a}{e^z}$$

$$= e^x + \Sigma A \frac{1}{z^{-a} + z^{-a+1} + \ldots + \frac{1}{a!} + \frac{z}{(a+1)!} + \ldots}$$

e, para $x = 0$ ou $z = \infty$,

$$y_0^{(n)} = 1 \,.$$

Applicando pois a formula de Maclaurin, vem

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \,.$$

Quando n augmenta indefinidamente, no segundo membro apparece uma série convergente cujo limite e^x é differente de y; e portanto o limite do resto R_n é differente de zero.

93. — *Logarithmo de* $1 + x$. — Consideremos agora a funcção

$$y = \log (1 + x) \,.$$

Por ser (n.º 78)

$$y' = (1 + x)^{-1} \,.\, y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)\,!\, (1 + x)^{-n} \,,$$

a formula de Maclaurin dá

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-2} \,.\, \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n-1} \,.\, \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1} \,.\, \frac{x}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} \,,$$

empregando a formula do resto dada por Cauchy.

1) Se x estiver comprehendido entre $+1$ e -1, a fracção $\frac{x}{1+\theta x}$ é finita, e a fracção $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ é menor do que a unidade. Logo R_n tem por limite zero quando n augmenta indefinidamente, e a funcção proposta póde ser desenvolvida em série pela formula

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

2) Se o valor absoluto de x fôr superior á unidade, esta série será divergente (n.° 12—3.°), visto que a razão de dous termos consecutivos $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ e $\frac{x^n}{n}$ é sempre superior a x.

Nota.—Por meio da formula precedente só podem ser calculados os logarithmos dos numeros comprehendidos entre 0 e 2; é portanto necessario obter uma formula applicavel a todos os casos. Ponhamos para isso

$$x = \frac{p-q}{p+q}$$

o que dá

$$\frac{p}{q} = \frac{1+x}{1-x}$$

e portanto

$$\log p - \log q = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right)$$

$$= 2\left[\frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^n + \ldots\right]$$

onde n é impar.

Esta série é tanto mais convergente quanto menor fôr

$p - q$ e maior fôr $p + q$, e serve para calcular $log\ p$ quando $log\ q$ é conhecido.

94. — *Funcções circulares.* — **I** — Consideremos a funcção

$$y = \text{sen}\, x\,.$$

Temos, applicando a formula de Maclaurin,

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\,\text{sen}\left(\theta x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Visto que $sen\left(\theta x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$ é finito e $\frac{x^n}{n\,!}$ tende para zero quando n augmenta indefinidamente, a formula precedente dá a série:

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots,$$

que tem logar qualquer que seja x.

II — Do mesmo modo se acha o desenvolvimento em série de *cos* x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2\,n)\,!} \mp \ldots$$

Nota. — As funcções *sen* x e *cos* x appareceram pela primeira vez na Trigonometria, e ahi foram deduzidas geometricamente as suas propriedades. Definindo estas funcções pelas séries precedentes, póde-se constituir analyticamente toda a sua theoria (*).

III — Consideremos agora a funcção

$$y = \text{sen}\,(\text{sen}\, x)\,,$$

ou

$$y = \text{sen}\, u,\ u = \text{sen}\, x\,,$$

e seja $x < 1$ (em valôr absoluto).

(*) Tannery: *Introduction à la théorie des onctions*, pag. 153.

Por ser (n.º 79 — IV)

$$\frac{y^{(m)}}{m\,!}=\Sigma\,\frac{\operatorname{sen}\left(u+i\,\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^{\alpha}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^{\beta}\left(x+2\,\frac{\pi}{2}\right)\dots}{\alpha\,!\,\beta\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\dots(m\,!)^{\lambda}}$$

$$\alpha+2\,\beta+\dots m\,\lambda=m,\ i=\alpha+\beta+\dots+\lambda$$

os coefficientes da série

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)=a_1\,x+a_2\,x^2+\dots+a_{n-1}\,x^{n-1}+R_n$$

serão dados pela formula

$$a_m=\frac{y_0^{(m)}}{m\,!}=\Sigma\,\frac{\operatorname{sen}i\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^{\alpha}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^{\beta}2\,\frac{\pi}{2}\dots}{\alpha\,!\,\beta\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\dots(m\,!)^{\lambda}},$$

onde i deve ser impar e onde o producto

$$\operatorname{sen}i\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}^{\alpha}\frac{\pi}{2}\dots$$

é igual a zero, ou a $+1$, ou a -1; e o resto é dado pela formula

$$R_n=x^n\,\Sigma\,\frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\theta\,x+i\,\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\theta x+\frac{\pi}{2}\right)\dots}{\alpha\,!\,\beta\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\dots(n\,!)^{\lambda}}.$$

Por ser

$$R_n<\frac{x^n}{n\,!}\,\Sigma\,\frac{n\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\dots\lambda\,!\,(2\,!)^{\beta}\dots(n\,!)^{\lambda}}$$

o resto R_n tende para zero (n.º 97 — IV — 4.º) á medida que n tende para o infinito; e portanto a funcção sen (sen x) é susceptivel de ser desenvolvida em série ordenada segundo as potencias inteiras positivas de x, se fôr $x<1$ (em valôr absoluto).

Do mesmo modo se desenvolvem as funcções

$$\text{sen}(\cos x),\ \cos(\cos x),\ e^x,\ \text{sen}(e^x),\ \text{etc.}$$

IV — Applicando a formula de Maclaurin á funcção

$$y = \text{arc}(\text{tang}\, x)$$

vem (n.º 80)

$$\text{arc}(\text{tang}\, x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n.$$

A expressão de $y^{(n)}$ dada no n.º 80 mostra que é

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{\beta!} \cdot \frac{(2\,\theta x)^{n-1-2\beta}}{(1+\theta^2 x^2)^{n-\beta}}$$

ou

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{\beta!} \cdot \frac{1}{(2\,\theta\, x)^{\beta+1}} \cdot \left(\frac{2\,\theta x}{1+\theta^2 x^2}\right)^{n-\beta}.$$

A primeira d'estas desigualdades, no caso de ser $x < \frac{1}{2}$ (em valôr absoluto), e a segunda no caso de ser $x > \frac{1}{2}$ e < 1 (em valôr absoluto) dão

$$R_n < \frac{x^n}{n} \Sigma \frac{1}{\beta!} < \frac{x^n}{n} e,$$

donde se conclue que o resto de R_n tende para zero quando n tende para o infinito, e temos portanto a série

$$\text{arc}(\text{tang}\, x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

quando x está comprehendido entre $+1$ e -1.

Se é $x > 1$ (em valôr absoluto), a série precedente é divergente.

III

Interpolação

95. — O fim da interpolação é procurar uma funcção $f(x)$ que, quando a x se dá os valores $x_1, x_2, x_3; \ldots, x_k$, toma valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$ dados.

Este problema é indeterminado, em quanto se não dá a fórma da funcção. Aqui supporemos que se requer que a funcção $f(x)$ seja inteira e do grão $k - 1$, e n'este caso satisfaz evidentemente ao problema a formula seguinte, devida a Lagrange:

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_k)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_k)} y_1$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_k)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_k)} y_2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})} y_k.$$

96. — Consideremos agora o caso mais geral de serem dados os valores que toma a funcção $f(x)$ e suas derivadas, quando á variavel x se dá valores particulares.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k$ os valores dados a x, e sejam os valores correspondentes da funcção e suas derivadas os seguintes:

$$x = x_1, y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(\alpha - 1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = x_i, y_i, y'_i, \ldots, y_i^{(\beta - 1)}$$

....

$$x = x_k,\ y_k,\ y'_k,\ \ldots,\ y_k^{(\lambda-1)}$$

Ponhamos (*)

$$F(x) = (x - x_1)^\alpha \ldots (x - x_i)^\beta \ldots (x - x_k)^\lambda$$

e (n.º 27 — I)

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{M_1}{x - x_i} + \frac{M_2}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{M_\beta}{(x - x_i)^\beta}\right],$$

onde M_1, M_2, ..., M_β são os coefficientes de $h^{\beta-1}$, $h^{\beta-2}$, ..., h^0 no quociente $\dfrac{h^\beta f(x_i+h)}{F(x_i+h)}$.

Por outra parte, chamando A_1, A_2, ..., A_α; ..., B_1, B_2, ..., B_β; ... os numeradores das fracções simples em que se decompõe a fracção $\dfrac{1}{F(x)}$, temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 f(x)}{x - x_1} + \frac{A_2 f(x)}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x - x_1)^\alpha}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{B_1 f(x)}{x - x_i} + \frac{B_2 f(x)}{(x - x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta f(x)}{(x - x_i)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(*) A analyse que segue é tirada do nosso artigo — *Sur une formule d'interpolation* publicado nas *Memorias da Sociedade Real das Sciencias de Liège* — (2.ª série, tomo x).

$$+\frac{P_1 f(x)}{x-x_k}+\frac{P_2 f(x)}{(x-x_k)^2}+\ldots+\frac{P_\lambda f(x)}{(x-x_k)^\lambda}.$$

Pondo $x = x_i + h$, multiplicando por h^β e ordenando segundo as potencias de h, vem

$$\frac{h^\beta f(x_i+h)}{F(x_i+h)} = B_1\left[h^{\beta-1} f(x_i) + h^\beta f'(x_i) + \ldots\right]$$

$$+ B_2\left[h^{\beta-2} f(x_i) + h^{\beta-1} f'(x_i) + \tfrac{1}{2} h^\beta f''(x_i) + \ldots\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ B_\beta\left[f(x_i) + h f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-1)!} h^{\beta-1} f^{\beta-1}(x_i) + \ldots\right]$$

$$+ R h^\beta,$$

onde o termo Rh^β contém as potencias de h, superiores a β, que resultam dos outros termos:

$$\frac{A_1 f(x_i+h)}{x_i-x_1+h},\ \frac{A_2 f(x_i+h)}{(x_i-x_1+h)^2},\ \text{etc.}$$

da funcção considerada.

Temos pois

$$M_1 = B_1 f(x_i) + B_2 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-1)!} B_\beta f^{\beta-1}(x_i)$$

$$M_2 = B_2 f(x_i) + B_3 f'(x_i) + \ldots + \frac{1}{(\beta-2)!} B_\beta f^{\beta-2}(x_i)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_\beta = B_\beta f(x_i);$$

e portanto

$$f(x) = F(x) \sum_{i=1}^{k} \left\{ \left[\frac{B_1}{x-x_i} + \frac{B_2}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_i)^\beta} \right] y_i \right.$$

$$\left[\frac{B_2}{x-x_i} + \frac{B_3}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-x_i)^{\beta-1}} \right] y'_i$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left. + \frac{1}{(\beta-1)!} \cdot \frac{B_\beta}{x-x_i} y_i^{(\beta-1)} \right\}.$$

Esta formula dá uma funcção inteira do gráo $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1$ que resolve a questão proposta. Vê-se que para a applicar, é necessario decompôr em fracções simples a fracção $\frac{1}{F(x)}$.

Nota. — Tanto esta formula, como a de Lagrange, quando algumas das quantidades k, α, β, ... se tornam infinitas, dão séries, cuja convergencia será estudada n'outra parte d'este Curso.

IV

Desenvolvimento em série das funcções implicitas

97. — A formula de Maclaurin applica-se tanto ás funcções explicitas, como ás funcções implicitas. Aqui vamos fazer applicação d'ella á funcção implicita y definida pelas equações.

$$y = f(u), \quad u = t + x\,\varphi_1(u) + x^2\,\varphi_2(u) + \ldots + x^k\,\varphi_k(u)$$

que vamos desenvolver em série ordenada segundo as potencias de x.

Derivando a segunda equação relativamente a x e a t, vem

$$\frac{du}{dx} = \varphi_1(u) + 2\,x\,\varphi_2(u) + k\,x^{k-1}\,\varphi_k(u)$$

$$+ [x\,\varphi'_1(u) + x^2\,\varphi'_2(u) + \ldots + x^k\,\varphi'_k(u)]\,\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dt} = 1 + [x\,\varphi'_1(u) + \ldots + x^k\,\varphi'_k(u)]\,\frac{du}{dt}\,;$$

e portanto

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\,[\varphi_1(u) + 2x\,\varphi_2(u) + \ldots + k\,x^{k-1}\,\varphi_k(u)]$$

ou

$$\frac{du}{dx} = \theta_1\,\frac{du}{dt}\,,$$

pondo

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + 2x\,\varphi_2(u) + \ldots + k\,x^{k-1}\,\varphi_k(u)\,.$$

Mas é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\,,\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\,,$$

logo teremos

$$\frac{dy}{dx} = \theta_1\,\frac{dy}{dt}\,.$$

Derivando esta equação relativamente a x e a t e chamando θ_2 a derivada de θ_1 relativamente a x, considerando u como constante, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx\,dt}\theta_1 + \frac{dy}{dt}\left[\theta_2 + \theta_1\frac{d\theta_1}{du}\cdot\frac{du}{dt}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx\,dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\theta_1 + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\theta_1}{du}\cdot\frac{du}{dt};$$

e portanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\theta_1^2 + \frac{dy}{dt}\left[\theta_2 + 2\,\theta_1\frac{d\theta_1}{du}\frac{du}{dt}\right]$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\theta_1^2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\theta_2.$$

Derivando esta equação relativamente a x obtem-se do mesmo modo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\left(\frac{dy}{dt}\theta_1^3\right)}{dt^2} + 3\,\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\theta_1\,\theta_2\right)}{dt} + \frac{dy}{dt}\theta_3,$$

e assim successivamente.

Em geral, podemos pôr

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \Sigma A\,\frac{d^{i-1}\left(\frac{dy}{dt}\theta_1^{\alpha}\,\theta_2^{\beta}\,\ldots\,\theta_k^{\lambda}\right)}{dt^{i-1}},$$

sendo A, i, α, β, etc. numeros inteiros que vamos determinar.

Para isso, appliquemos a formula precedente á funcção definida pelas equações

$$y = f(u),\ u = t + x + x^2 + \ldots + x^k,$$

o que dá

$$\theta_1 = 1 + 2x + \dots k x^{k-1},\ \theta_2 = \frac{d^2u}{dx^2},\ \theta_3 = \frac{d^3u}{dx^3},\ \text{etc.};$$

e teremos

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma A \frac{d^i y}{dt^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^\lambda.$$

Por outra parte, temos (n.º 79 — IV)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\dots\,\lambda!\,(2!)^\beta \dots (n!)^\lambda} \cdot \frac{d^i y}{du^i} \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^\beta \dots$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$\alpha + 2\beta + \dots + k\lambda = n,$$

e onde é

$$i = \alpha + \beta + \dots + \lambda.$$

Comparando as duas formulas precedentes obtem-se o valôr de A e os de α, β, ..., e vem pois

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\dots\lambda!\,(2!)^\beta\dots(k!)^\lambda}, \cdot \frac{d^{i-1}\left[\frac{dy}{dt}\,\theta_1{}^\alpha\,\theta_2{}^\beta \dots \theta_k{}^\lambda\right]}{at^{i-1}}.$$

Pondo agora $x = 0$ nas formulas

$$\theta_1 = \varphi_1(u) + \dots + k x^{k-1} \varphi_1(u)$$

$$\theta_2 = 2\varphi_2(u) + 2 \cdot 3 x \varphi_3(u) + \dots + k(k-1) x^{k-2} \varphi^k(u)$$

....

$$\theta^k = k!\, \varphi^k(u)$$

vem

$$\theta_1 = \varphi_1(u),\ \theta_2 = 2\,!\,\varphi_2(u), \ldots, \theta_k = k\,!\,\varphi_k(u),$$

$$\theta_{k+1} = \theta_{k+2} = \ldots = 0,$$

e portanto

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = \Sigma\,\frac{n\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!}\cdot\frac{d^{i-1}[f'(t)(\varphi_1(t))^{\alpha}(\varphi_2(t))^{\beta}\ldots(\varphi_k(t))^{\lambda}]}{dt^{i-1}}$$

onde

$$\alpha + 2\beta + \ldots + k\lambda = n,\ i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

Applicando ás funcções propostas a formula de Maclaurin vem pois o desenvolvimento pedido:

$$y = f(t) + \Sigma\,\frac{x^n}{\alpha\,!\,\beta\,!\ldots\lambda\,!}\cdot\frac{d^{i-1}[f'(t)(\varphi_1(t))^{\alpha}\ldots(\varphi_k(t))^{\lambda}]}{dt^{i-1}} + R_m$$

D'esta formula que publicámos no nosso artigo *Sur le développement des fonctions implicites* (*Journal de Mathématiques de Liouville* — 3.ª série, tomo VII) tira-se, pondo $k = 1$, a formula notavel

$$y = f(t) + \sum_{n=1}^{m}\frac{x^n}{n\,!}\cdot\frac{d^{i-1}[f'(t)(\varphi_1(t))^n]}{dt^{i-1}} + R_m,$$

devida a Lagrange (*), que dá o desenvolvimento em série da funcção y definida pelas equações

$$y = f(u),\ u = t + x\,\varphi_1(y).$$

As condições de convergencia das séries precedentes, que se não podem tirar da consideração do resto, por ser muito complicado, serão dadas n'outra parte d'este Curso.

(*) *Oeuvres*, tomo III.

V

Maximos e minimos

98. — Diz-se que a funcção

$$y = f(x)$$

tem um valôr *maximo* no ponto $x = x_1$, se houver um valôr δ tal que a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

seja satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre $+\delta$ e $-\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção tem um valôr *minimo* no ponto $x = x_1$ se a desigualdade

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

fôr satisfeita por todos os valores de h comprehendidos entre $+\delta$ e $-\delta$.

Se a funcção dada fôr continua e a sua derivada fôr finita e determinada no intervallo de $x = a$ a $x = b$, a igualdade (n.º 49)

$$f(x + h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$$

mostra que, em quanto $f'(x)$ fôr differente de zero, se póde dar a h um valôr tão pequeno que o signal da differença precedente mude com o signal de h. Logo é condição necessaria para que a $x = x_1$ corresponda um valôr de y maximo ou minimo, que $x = x_1$ satisfaça á equação

$$f'(x) = 0 \, .$$

Supponhamos agora que a derivada $f''(x)$ é finita e determinada na visinhança do ponto $x = x_1$. A formula

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \tfrac{1}{2} h^2 f''(x_1 + \theta h)$$

mostra que na visinhança de x_1 é sempre

$$f(x_1 + h) - f(x_1) > 0$$

se $f''(x_1)$ é positiva, e

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

se $f''(x_1)$ é negativa.

Logo a $x = x_1$ corresponderá um valôr maximo ou minimo de y segundo $f''(x_1)$ é negativa ou positiva.

Se fôr $f''(x_1) = 0$, e a derivada $f'''(x)$ fôr finita e determinada na visinhança do ponto x_1, a formula

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = \frac{h^3}{3\,!} f'''(x_1)$$

mostra que para haver maximo ou minimo, é necessario que seja $f'''(x_1) = 0$.

Continuando do mesmo modo, chega-se á regra seguinte para achar os valôres de x que tornam a funcção y maxima ou minima:

Resolve-se a equação f′ (x) = 0, *e substitue-se cada um dos valores obtidos para* x *nas derivadas seguintes* f″ (x), f‴ (x). . . , fⁿ (x), *até encontrar uma* fⁿ (x) *que não se annulle. Se esta derivada fôr d'ordem impar, ao valôr de* x *considerado não corresponderá nem maximo nem minimo de* y; *se fôr de ordem par, ao valôr de* x *considerado corresponderá um maximo se este valôr tornar* fⁿ (x) *negativa, e um minimo se tornar* fⁿ (x) *positiva.*

Substituindo depois estes valores de x *na proposta obtem-se os maximos e minimos procurados.*

Exemplo 1.º—Para achar os valores de x que tornam maxima ou minima a funcção

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

temos de resolver a equação

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0$$

que dá $x = 1$ e $x = 2$.

*

Substituindo o valôr $x = 1$ na derivada

$$y'' = 12\,x - 18$$

vem um resultado negativo, e portanto a $x = 1$ corresponde um maximo $y = 1$ da funcção considerada.

Substituindo o valôr $x = 2$ na mesma derivada vem um resultado positivo e portanto a $x = 2$ corresponde um minimo $y = 0$.

Exemplo 2.º — Achar os pontos da cycloide onde o raio de curvatura é maximo, e onde é minimo.

Para isso basta procurar os valores de t que tornam (n.º 70 — III) a funcção

$$f(t) = 1 - \cos t$$

maxima ou minima.

Temos para isso

$$f'(t) = \operatorname{sen} t = 0,$$

o que dá

$$t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots,$$

e portanto os pontos onde o raio de curvatura póde ser maximo ou minimo são:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = \pi r \\ y = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = 2\pi r \\ y = 0 \end{array}\right\}, \ldots$$

A derivada $f''(t) = \cos t$ é alternadamente igual a $+1$ e a -1; logo no primeiro ponto o raio de curvatura é minimo, no segundo é maximo e assim successivamente.

Substituindo os valores de t na expressão de R vê-se que o maximo valôr do raio de curvatura é $4r$ e o valôr minimo é zero, como já sabiamos.

Exemplo 3.º — No caso da funcção

$$y = \cos \frac{1}{x}$$

temos de resolver a equação

$$y' = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

que dá

$$x = \frac{1}{k\pi}, \; k = 1, 2, 3, \ldots, \infty.$$

A derivada segunda

$$y'' = -\frac{2}{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \cos \frac{1}{x}$$

dá

$$y'' = -\frac{1}{x^4} \cos k\pi\,;$$

logo a

$$x = \frac{1}{\pi}, \, x = \frac{1}{2\pi}, \ldots$$

correspondem alternadamente o maximo $+1$ e o minimo -1.

Temos aqui o primeiro exemplo de uma funcção que, quando x se approxima indifinidamente de zero, oscilla entre $+1$ e -1; de modo que entre zero e um outro valôr determinado dado a x, tem um numero infinito de maximos e minimos. No ponto $x = 0$ a funcção é indeterminada.

Exemplo 4.° — Consideremos a funcção

$$y = X_n,$$

X_n representando um polynomio de Legendre (n.° 90).

Como as n raizes da equação $X_n = 0$ são reaes e desiguaes e estão comprehendidas entre $+1$ e -1, a equação $X'_n = 0$ tem (n.° 49 — II) $n - 1$ raizes reaes e desiguaes comprehendidas entre os mesmos limites, e nenhuma d'ellas annulla X''_n. Logo o polynomio X_n terá $n - 1$ maximos ou minimos comprehendidos no intervallo de $x = +1$ a $x = -1$. No caso, por exemplo, do polynomio

$$X_3 = 5x^3 - 3x,$$

a equação $X'_3 = 0$ dá $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ e $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$. A primeira raiz torna X''_3 positiva e a segunda torna-a negativa; logo á primeira corresponde um minimo $-2\sqrt{\frac{1}{5}}$, e á segunda um maximo $+2\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Nota. — Pela regra precedentemente dada acham-se os valores de x que tornam y maximo ou minimo sem tornar a funcção $f'(x)$ discontinua. Póde portanto haver outros valores de x que tornem y maximo ou minimo, correspondentes aos valores x_1 de x que tornam a funcção $f'(x)$ discontinua. Não ha regra geral para saber se estes valores de x dão maximo ou minimo; é necessario em cada caso particular discutir a funcção, para vêr se $f(x_1 + h)$ cresce ou decresce quando h tende para zero passando por valores positivos ou negativos.

O mesmo acontece quando os valores que annullam $f'(x)$ tornem discontinua alguma das derivadas que seja necessario empregar no methodo precedente.

Assim, por exemplo, a funcção

$$f(x) = b + (x - a)^{\frac{2}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{2}{3}(x - a)^{-\frac{1}{3}}.$$

A derivada y' torna-se pois infinita quando $x = a$, e póde n'este caso haver maximo ou minimo.

Pondo $x = a + h$, vem

$$f(a + h) - f(a) = h^{\frac{2}{3}}$$

e portanto

$$f(a + h) - f(a) > 0$$

quer h seja positivo quer seja negativo. A $x = a$ corresponde pois um minimo b da funcção.

99. — Se a funcção cujos maximos e minimos queremos achar, fôr a funcção implicita y definida pela equação

$$F(x, y) = 0,$$

determinaremos, pela eliminação de x e y entre esta equação e a equação

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0,$$

os valores de x que tornam y maximo ou minimo e os valores de y correspondentes. Substituindo depois estes valores nas derivadas y'', y''', etc., vê-se pela ordem da primeira derivada que não se annulla e pelo signal do resultado, quaes d'estes valores de y são maximos ou minimos.

Exemplo. — Procuremos as ordenadas maxima e minima da hyperbole cuja equação é

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 50 = 0.$$

Eliminando x e y entre a equação precedente e a equação

$$y' = \frac{4x + 3y}{4y - 3x} = 0,$$

ou

$$4x + 3y = 0,$$

vem

$$x = \pm 3, y = \mp 4.$$

Derivando y' e pondo no resultado $x = 3$ e $y = -4$, vem para y'' um valôr negativo; logo á abscissa $x = 3$ corresponde uma ordenada maxima $y = -4$, ou uma ordenada minima negativa cujo valôr absoluto é igual a 4. Os valores $x = -3$, $y = 4$ dão a y'' um valôr positivo; logo á abscissa $x = -3$ corresponde uma ordenada minima $y = 4$.

100. — *Funcções de duas variaveis independentes.* — Diz-se que a funcção de duas variaveis independentes

$$z = f(x, y)$$

é *maxima* no ponto $x = x_1$, $y = y_1$, se o valôr $f(x_1, y_1)$ da funcção é maior do que os valores que ella toma nos pontos visinhos de (x_1, y_1); isto é, se ha um valôr δ tal que a desigualdade

$$f(x_1 + h, y_1 + k) < f(x_1, y_1)$$

seja satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Do mesmo modo, diz-se que a funcção é *minima* no ponto (x_1, y_1) se a desigualdade

$$f(x_1 + h, y_1 + k) > f(x_1, y_1)$$

é satisfeita por todos os valores de h e k comprehendidos entre $-\delta$ e $+\delta$.

Procuremos agora os valores de x e y que podem tornar z maximo ou minimo. Para isso, podemos considerar a variavel independente y como funcção arbitraria de x, e portanto será condição necessaria para que z seja maximo ou minimo que seja satisfeita a equação

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' = 0,$$

que, por ser y' arbitraria, dá

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Estas equações determinam os valores de x e y que podem dar a z um valôr maximo ou minimo.

Derivando z' e attendendo á segunda das equações precedentes, vem o trinomio

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} y'^2,$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[\left(y' + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right)^2 + \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}\right],$$

que, para haver maximo ou minimo, deve ter sempre o mesmo signal, qualquer que seja o valôr de y', quando se substitue x e y pelos seus valores tirados das equações precedentes. Para isso, é necessario evidentemente que a condição

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right) \overline{\overline{>}} \, 0$$

seja satisfeita por estes valores de x e y; e o signal de z'' será o mesmo que o signal que toma $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Logo *para achar os valores maximos ou minimos de* z, *deve-se resolver relativamente a* x *e* y *as equações*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \, , \; \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \, ,$$

e verificar se os valores resultantes satisfazem á condição

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \overline{\overline{>}} \, 0 \, .$$

N'este caso, se estes valores derem a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *o signal* $+$*. o valôr de* z *correspondente será minimo; se derem a* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *o signal* $-$ *, o valôr de* z *correspondente será maximo.*

Se os valores precedentes de x e y annullarem z'' é necessario para haver maximo ou minimo que estes valores annullem z''' e que $z^{(4)}$ tenha sempre o mesmo signal qualquer que seja y'; etc.

Nos casos ordinarios raras vezes é necessario recorrer ás derivadas de z superiores á segunda.

Exemplo.—Achar a mais curta distancia entre um ponto x_0, y_0, z_0 *e um plano.*

$$z = Ax + By + C \, .$$

Temos de achar os valores de x e y que tornam maxima ou minima a funcção

$$D^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

onde z é dado em funcção de x e y pela equação do plano.

As equações que determinan x e y são pois

$$\frac{\partial D^2}{\partial x} = x - x_0 + A\,(z - z_0) = 0\,,\ \frac{\partial D^2}{\partial y} = y - y_0 + B\,(z - z_0) = 0\,;$$

e como estas equações são as de uma recta prependicular ao plano, segue-se que o ponto pedido é o pé da perpendicular abaixada do ponto sobre o plano, como já se sabia.

Tirando d'estas equações e da equação do plano os valores de x, y e z e substituindo na expressão de D, vem a formula

$$D = \frac{Ax_0 + By_0 + C - z_0}{(1 + A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}}\,,$$

que dá a minima distancia pedida.

Podemos verificar que o precedente valôr de D é um minimo. Com effeito, pondo na expressão

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 D^2}{\partial x^2} = 2\,(A^2 + 1),\ \frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2} = 2(B^2 + 1),\ \frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial y} = 2\,AB$$

vem o resultado

$$4\,(1 + A^2 + B^2),$$

que, por ser positivo assim como a derivada $\frac{\partial^2 D^2}{\partial y^2}$, mostra que o valôr precedente de D^2 é um minimo.

VI

Indeterminações

101. — Se a funcção $f(x)$ é indeterminada quando $x = a$, chama-se *verdadeiro valôr da funcção* o limite para que tende $f(x)$ quando x tende para a. Vamos procurar este limite em alguns casos mais importantes.

I — Se fôr

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

e as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ se annullarem quando $x = a$, a funcção reduz-se a $\frac{0}{0}$ e vamos achar o seu verdadeiro valôr. Por ser (n.º 86)

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)},$$

suppondo as funcções $\varphi'(x)$ e $\varphi'(x)$ continuas na visinhança do ponto $x = a$, teremos, quando h tende para zero

$$f(a) = \lim f(a+h) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Se fôr $\varphi'(a) = 0$ e $\psi'(a) = 0$ teremos do mesmo modo

$$f(a) = \frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Finalmente, se forem nullas as funcções $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{n-1}(a)$ e $\psi(a)$, $\psi'(a)$, ..., $\psi^{n-1}(a)$, teremos

$$f(a) = \frac{\varphi^n(a)}{\psi^n(a)}.$$

Exemplo — A funcção

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x - 1}{e^x - 1 - \operatorname{sen} x}$$

é indeterminado quando $x = 0$, assim como a funcção

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}.$$

A fracção

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{-\cos x}{e^x + \operatorname{sen} x}$$

é igual a $-\frac{1}{2}$ quando é $x = 0$; logo $-\frac{1}{2}$ é o verdadeiro valôr de y correspondente a $x = 0$.

II—Seja agora $f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{\infty}{\infty}$ e procurêmos o verdadeiro valôr d'esta fracção, isto é, o limite para que tende $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando x tende para a.

Temos, como no caso anterior,

$$f(a+h) = -\frac{\dfrac{1}{\psi(a+h)}}{\dfrac{1}{\varphi(a+h)}} = \frac{\psi'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)} \cdot \left[\frac{\varphi(a+\theta h)}{\psi(a+\theta h)}\right]^2$$

ou

$$\frac{\varphi'(a+\theta h)}{\psi'(a+\theta h)} = \frac{[f(a+\theta h)]^2}{f(a+h)},$$

d'onde se tira, quando h tende para zero,

$$f(a) = \lim f(a+h) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Logo acha-se o verdadeiro valôr da fracção considerada pela mesma regra que no caso anterior.

Exemplo. — A funcção

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\log x}{x^{-n}},$$

dá $\frac{\infty}{\infty}$ quando é $x = 0$. Mas o quociente

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-n\,x^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$$

é nullo quando $x = 0$; logo é tambem nulla a funcção considerada.

III — Se a funcção

$$f(x) = \varphi(x) \,.\, \psi(x)$$

se reduzir a $0 \times \infty$ quando $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valôr applicando a regra anterior á fracção $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$ que se reduz a $\frac{0}{0}$ ou a fracção $\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ que se reduz a $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo. — A funcção

$$y = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

dá $0 \times \infty$ quando é $n = \infty$. Para achar o seu verdadeiro valôr, consideremos a fracção

$$y = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, e que dá, derivando o numerador e o denominador relativamente a n, a fracção

$$\frac{-\frac{1}{n^2}x^{\frac{1}{n}}\log x}{-\frac{1}{n^2}}$$

que se seduz a *log* x quando è $n = \infty$. Logo temos a formula notavel

$$\log x = \lim n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right), n = \infty .$$

IV — Se a funcção

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

se reduzir a $\infty - \infty$ quando é $x = a$, acha-se o seu verdadeiro valôr applicando a regra anterior á fracção

$$\frac{\frac{1}{\psi(x)} - \frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$.

V — Se a funcção

$$y = \varphi(x)^{\psi(x)}$$

se reduzir a 0^0, 1^∞, ∞^0 quando é $x = a$ acha-se o seu verdadeiro valôr applicando a regra anterior á funcção

$$log\, y = \psi(x)\, log\, \varphi(x)$$

que se reduz a $0 \times \infty$.

Exemplo. A funcção

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

quando $n = \infty$, dá 1^∞. Para achar o seu verdadeiro valôr, determinemos o verdadeiro valôr de funcção

$$\log y = n \log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

que se reduz a $\frac{0}{0}$, o que dá $log\ y = x$, e portanto $y = e^x$. Temos pois a formula

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ n = \infty.$$

Nota. Nem sempre se consegue achar pelas regras precedentes o verdadeiro valôr das funcções que se appresentam debaixo da fórma indeterminada. Recorre-se n'este caso a processos especiaes, e principalmente ao desenvolvimento das funcções consideradas em serie.

102. — Supponhamos que a derivada da funcção y definida pela equação

$$f(x,\ y) = 0$$

que é dada pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

se reduz a $\frac{0}{0}$ quando é $x = a$, isto é, que temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

e procuremos o verdadeiro valôr de y'.

Derivemos para isso esta equação, o que dá

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

e tiremos depois o valôr de y' da equação que resulta de substituir x por a na equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 = 0.$$

Se $x = a$ annulla as derivadas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

deriva-se outra vez a equação anterior e põe-se no resultado $x = a$, o que leva a uma equação do terceiro gráo em y'; e assim se continúa até chegar a uma equação que não seja identicamente nulla.

Exemplo. — A equação do *folium*

$$y^3 - 3\,axy + x^3 = 0$$

dá

$$(y^2 - ax)\,y' = ay - x^2,$$

e portanto a derivada y' reduz-se a $\frac{0}{0}$ quando é $x = 0$ e $y = 0$.

Derivando outra vez, vem a equação

$$(y^2 - ax)\,y'' + 2y\,y'^2 - 2a\,y' + 2\,x = 0$$

que, pondo $x = 0$ e $y = 0$, dá $y' = \infty$ e $y' = 0$.

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS DA FORMULA DE TAYLOR

I

Curvas planas

103. — *Lemma.* — *Se* β *e* α *representarem quantidades infinitamente pequenas de ordem* n *e de ordem* m *relativamente a* h, *e se fôr* $n > m$, *haverá um valôr* h_1 *de* h *tal que a desigualdade (em valôr absoluto)* $\beta < \alpha$ *será satisfeita por todos os valores de* h *inferiores a* h_1.

Com effeito, das relações

$$\beta = h^n (A + \varepsilon), \ \alpha = h^m (B + \varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas e ε e ε' quantidades infinitamente pequenas, tira-se

$$\alpha - \beta = h^m [B + \varepsilon' - h^{n-m} (B + \varepsilon)]$$

e esta igualdade faz vêr que se póde dar a h um valôr tão pequeno que $\alpha - \beta$ tenha o signal de $h^m (B + \varepsilon')$, isto é, o signal de α. Será pois $\alpha > \beta$.

104. — *Contacto das curvas planas.* — Sejam

$$y = f(x), \ Y = F(X)$$

as equações de duas curvas que passam por um ponto cujas coordenadas são x_0 e y_0. Se a differença $F(x_0+h)-f(x_0+h)$ de duas ordenadas da curva correspondentes á mesma abscissa x_0+h, fôr infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h, diz-se que as curvas tem no ponto (x_0, y_0) um *contacto de ordem* n. N'este caso, a segunda curva approxima-se mais da primeira na visinhança do ponto (x_0, y_0) do que outra curva que tenha com ella um contacto de ordem menos elevada (n.º 103).

As condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n decorrem immediatamente da formula de Taylor, que dá

$$\begin{aligned}F(x_0+h)-f(x_0+h) &= F(x_0)-f(x_0)\\ &\quad + h\,[F'(x_0)-f'(x_0)]\\ &\quad + \ldots + \frac{h^n}{n!}[F^n(x_0)-f^n(x_0)]\\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[F^{n+1}(x_0+\theta h)-f^{n+1}(x_0+\theta h)]\,;\end{aligned}$$

Com effeito, para que a differença $F(x_0+h)-f(x_0+h)$ seja infinitamente pequena de ordem $n+1$ relativamente a h é necessario e sufficiente que as differenças

$$F''(x_0)-f''(x_0),\ \ldots,\ F^n(x_0)-f^n(x_0)$$

sejam nullas, o que dá o seguinte:

Theorema. — *As condições necessarias e sufficientes para que as curvas consideradas tenham no ponto* (x_0, y_0) *um contacto de ordem* n *são*

$$f(x_0)=F(x_0),\ f'(x_0)=F'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0), = F^n(x_0).$$

105. — Se uma das curvas consideradas fôr completamente dada, e se ao mesmo tempo fôr dada a especie de outra curva e sua equação contiver $n+1$ parametros arbitrarios, podemos dar-lhes valores que satisfaçam ás $n+1$ equações da condição precedentes; de modo que a segunda curva terá um contacto de ordem n com a primeira. N'este caso diz-se que a segunda curva é *osculadora* da primeira, e tem com ella um contacto de ordem mais elevada do que qualquer outra curva da sua especie.

106. — A doutrina precedente, devida a Lagrange (*), vae-nos apresentar, debaixo de um novo ponto de vista, alguns dos resultados obtidos no Capitulo III.

I — Se quizermos achar a *recta osculadora* da curva

$$y = f(x)$$

temos de determinar as constantes A e B que entram na equação

$$Y = AX + B$$

da recta, de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B,\ f'(x_0) = A\ .$$

A equação da recta pedida será pois

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)\ ,$$

e portanto é tangente á curva dada.

II — Se quizermos achar o *circulo osculador* da curva

$$y = f(x)$$

no ponto (x_0, y_0), temos de determinar as constantes arbitrarias a, b, R que entram na equação

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2\ ,$$

de modo que sejam satisfeitas as condições do contacto de segunda ordem:

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ f''(x_0) = F''(x_0);$$

(*) *Théorie des fonctions analytiques.*

*

que, por serem as funcções $F(x_0)$, $F'(x_0)$ e $F''(x_0)$ dadas pelas equações:

$$(x_0 - a)^2 + (F(x_0) - b)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (F(x_0) - b)\, F'(x_0) = 0$$

$$1 + (F'(x_0))^2 + (F(x_0) - b)\, F''(x_0) = 0,$$

se reduzem a (pondo $y'_0 = f'(x_0)$ e $y''_0 = f''(x_0)$)

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (y_0 - b)\, y'_0 = 0$$

$$1 + y'^2_0 + (y_0 - b)\, y''_0 = 0.$$

D'estas equações tiram-se os valores das coordenadas a e b do centro e o valôr do raio R do circulo osculador:

$$R = \frac{(1 + y'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{y''_0}$$

$$a = x_0 - y'_0 \cdot \frac{1 + y'^2_0}{y''_0},\quad b = y_0 + \frac{1 + y'^2_0}{y''_0}.$$

Da comparação d'estas formulas com as que dão as coordenadas do centro e o raio do circulo de curvatura (n.° 69—I), conclue-se que *o circulo de curvatura e o circulo osculador correspondentes ao mesmo ponto de uma curva dada, coincidem.*

III — Determinemos finalmente uma curva cuja equação seja inteira e do grão $\alpha + \beta + \ldots + \lambda - 1 = t$:

$$Y = F(X) = A + BX + \ldots + TX^t,$$

que passe pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_k, y_k) da curva dada

$$y = f(x).$$

e que n'estes pontos tenha contactos respectivamente das ordens $\alpha - 1$, $\beta - 1$, ..., $\lambda - 1$ com esta curva.

As equações de condição do problema são

$$y_1 = F(x_1),\ y'_1 = F'(x_1),\ \ldots,\ y_1^{(\alpha - 1)'} = F^{(\alpha - 1)}(x_1)$$

....

$$y_k = F(x_k),\ y'_k = F'(x_k),\ \ldots,\ y_k^{(\lambda - 1)} = F^{\lambda - 1}(x_k),$$

onde y_1, y'_1, ...; y_2, y'_2, ...; etc. representam os valores que toma a funcção $f(x)$ e as suas derivadas quando é $x = a_1$, $x = a_2$, etc.

Vê-se pois que o problema proposto equivale ao de determinar a funcção $F(x)$ quando são dados os valores que esta funcção e as suas derivadas tomam nos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), etc.; e resolve-se por tanto por meio da formula dado no fim do n.º 96.

107. — *Nota 1.ª* — Para se applicar a doutrina precedente é necessario que as derivadas $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... $f^n(x_0)$ e $F'(x_0)$, $F''(x_0)$, ..., $F^n(x_0)$ sejam finitas e determinadas. O eixo das ordenadas não deve pois ser parallelo ás tangentes ás curvas no ponto (x_0, y_0), porque, se o fosse, viria $f'(x_0) = \infty$ ou $F'(x_0) = \infty$.

Nota 2.ª — A ordem do contacto é independente dos eixos coordenados a que as curvas estão referidas. Com effeito, representando por ρ e θ as novas coordenadas do ponto (x_0, y_0), as derivadas $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$, ..., $\frac{d^n\rho}{d\theta^n}$ exprimem-se por meio das formulas do n.º 64 em funcção de $f(x_0)$, $f'(x_0)$, ..., $f^n(x_0)$.

As derivadas correspondentes relativas á outra curva exprimem-se pelas mesmas funcções de $F(x_0)$, $F'(x_0)$, ..., $F^n(x_0)$. Logo os dous valores de $\frac{d\rho}{d\theta}$, $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$, etc. são iguaes.

108. — *Pontos d'inflexão.* — A determinação dos *pontos d'inflexão* da curva

$$y = f(x)$$

é facil de conseguir por meio do theorema do n.º 67—III. Com effeito, da igualdade

$$f''(x_0+h) = f''(x_0) + h\,f'''(x_0+\theta h)$$

conclue-se que, para $f''(x)$ mudar de signal no ponto (x_0, y_0), é necessario que seja $f''(x_0) = 0$. N'este caso, a igualdade

$$f''(x_0+h) = h\,f'''(x_0) + \tfrac{1}{2}h^2 f^4(x_0+\theta h)$$

mostra que (x_0, y_0) será um ponto d'inflexão, se $f'''(x_0)$ fôr differente de zero.

No caso de ser $f'''(x_0) = 0$, a igualdade

$$f''(x_0+h) = \frac{1}{2}h^2 f^4(x_0) + \frac{1}{2.3}h^3 f^5(x_0+\theta h)$$

mostra que para (x_0, y_0) ser ponto d'inflexão é necessario que seja $f^4(x_0) = 0$.

Continuando do mesmo modo, conclue-se a regra seguinte:

Para achar os pontos d'inflexão da curva cuja equação é $y = f(x)$, *determinem-se* x *e* y *por meio d'esta equação e da equação* $y'' = 0$.

Substituam-se depois cada grupo (x_0, y_0) *de valores resultantes nas derivadas seguintes de* y. *Se a primeira derivada que não se annulla fôr de ordem impar, o ponto* (x_0, y_0) *será um ponto d'inflexão, se fôr d'ordem par o ponto não será d'inflexão.*

Exemplo 1.º—Consideremos a curva cuja equação é

$$y = A \operatorname{sen}(ax+b) + B.$$

Teremos

$$y' = Aa\cos(ax+b),\; y'' = -Aa^2 \operatorname{sen}(ax+b);$$

e como os valores de x que tornam y'' nulla são dados pela formula

$$ax + b = k\pi,$$

onde k representa um inteiro qualquer positivo, negativo ou nullo, e como estes valores de x não annullam a terceira derivada

$$y''' = - Aa^3 \cos (ax + b),$$

os pontos $\left(\frac{-b + k\pi}{a}, B\right)$ serão os pontos d'inflexão da curva considerada.

Exemplo 2.º — A funcção

$$y = x + (x-1)^7$$

dá

$$y' = 1 + 7(x-1)^6,\ y'' = 7 \,.\, 6\,(x-1)^5,$$

$$y''' = 7 \,.\, 6 \,.\, 5\,(x-1)^4, \ldots, y^{(7)} = 7\,!\,.$$

Como o valôr $x = 1$ annulla a derivada y'', e como a primeira das derivadas seguintes que este valôr de x não annulla é d'ordem impar, o ponto $(1, 1)$ é um ponto d'inflexão.

109. — *Nota.* — No processo anterior para achar os pontos d'inflexão, parte-se da hypothese que as derivadas de y a que é necessario recorrer, são continuas. Logo póde ainda haver outros pontos d'inflexão onde as derivadas y' e y'' sejam discontinuas. Do mesmo modo, se alguma das derivadas y''', $y^{(4)}$, etc. fôr discontinua no ponto (x_0, y_0), não se póde distinguir pelo processo anterior se o ponto (x_0, y_0) é ou não d'inflexão.

N'estes casos, para achar os pontos d'inflexão recorre-se principalmente ao theorema do n.º 67 — II.

Exemplo 1.º — A funcção

$$y = b + (x-a)^{\frac{5}{3}}$$

dá

$$y' = \frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}},\ y'' = \frac{10}{9}(x-a)^{-\frac{1}{3}}.$$

Como $x = a$ torna y'' infinita, vamos vêr se o ponto (a, b) póde ser d'inflexão. Para isso, notemos que y'' é positiva quando é $x > a$ e é negativa quando é $x < a$; logo á direita do ponto (a, b) estando a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas, e á esquerda d'este ponto estando a concavidade voltada no sentido contrario, o ponto é d'inflexão (n.º 67 — II).

Exemplo 2.º — Do mesmo modo, a funcção

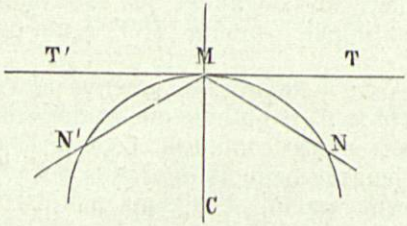
$$y = b + (x - a)^{\frac{7}{3}}$$

dá

$$y'' = \frac{28}{9}(x - a)^{\frac{1}{3}},\ y''' = \frac{28}{27}(x - a)^{-\frac{2}{3}}.$$

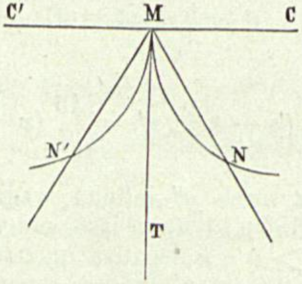
No ponto (a, b) annulla-se y'', mas y''' torna-se infinita, e o methodo anterior não é applicavel. Raciocinando porém como no exemplo anterior conclue-se que o ponto é d'inflexão.

110. — *Pontos singulares das curvas planas.* — Chama-se *ponto ordinario* de uma curva plana o ponto M onde se reunem dous arcos de curva cujas secantes MN e MN' tendem para direcções oppostas da mesma tangente TT'.



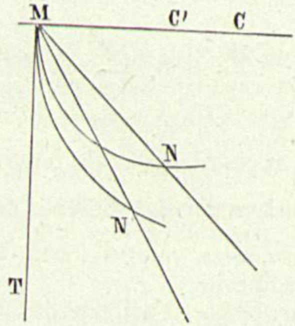
Aos pontos que não estão n'estas condições, chama-se *pontos singulares*. Taes são os pontos seguintes:

I — O *ponto de reversão de primeira especie*, que é aquelle em que se reunem dous arcos de curva cujas secan-



tes MN e MN' tendem para a mesma direcção MT da tangente, e cujos centros de curvatura C e C' estão collocados na mesma normal, cada um de seu lado da tangente.

II — O *ponto de reversão de segunda especie*, isto é, o ponto onde se reunem dous arcos de curva cujas secantes tendem para a mesma direcção da tangente e cujos centros de curvatura estão collocados na mesma normal e do mesmo lado da tangente.



III — O *ponto de suspensão* onde passa só um arco de curva.

IV — O *ponto anguloso* onde se reunem dous arcos de curva cujas tangentes são differentes.

V — O *ponto isolado*, que é aquelle que está completamente separado do resto da curva.

VI — O *ponto multiplo* que é aquelle onde se reunem dous ou mais pontos ordinarios ou singulares.

111. — Supponhamos que

$$F(x, y) = 0$$

é a equação da curva dada, e que a funcção $F(x, y)$ tem um unico valôr correspondente a cada grupo de valôres de x e y. Estão n'este caso as equações algebricas relativamente a x e y, visto que se pódem sempre desembaraçar dos radicaes. Estão tambem n'este caso, ou a elle se reduzem facilmente, muitas equações transcendentes. Assim, por exemplo, a equação

$$y = \log(xy + y^2) + \operatorname{sen}(2x + y)$$

reduz-se a

$$e^{y - \operatorname{sen}(2x+y)} = xy + y^2 .$$

Limitar-nos-hemos a procurar os pontos singulares das curvas determinadas por estas equações, fundando-nos, para isso, no theorema seguinte:

Se a funcção F (x, y) *e as derivadas* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ *forem continuas, os pontos singulares da curva dada satisfarão ás equações*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Sejam x_0 e y_0 as coordenadas do ponto que queremos analysar, P e Q os valôres correspondentes de $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$, e demonstremos que se estes valores forem ambos differentes de zero, o ponto é ordinario.

Mudemos para isso a origem das coordenadas para o ponto (x_0, y_0), e chamemos x' e y' as novas coordenadas dos outros pontos da curva, o que dá a nova equação da curva:

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = 0 .$$

Mas temos (n.º 45 — V)

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = Px' + Qy' + \alpha x' + \alpha_1 y',$$

onde α e α_1 são quantidades infinitamente pequenas quando x' e y' o são, isto é, quando o ponto (x', y') está infinitamente proximo do ponto (x_0, y_0).

Mudando de coordenadas rectangulares para coordenadas polares por meio das relações

$$x' = \rho \cos \theta, \ y' = \rho \operatorname{sen} \theta ,$$

e notando que podemos sempre pôr

$$P = -M \operatorname{sen} \omega, \ Q = M \cos \omega,$$

visto que esta transformação corresponde a referir a coordenadas polares M e ω um ponto cujas coordenadas rectangulares são P e Q, teremos

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = \rho[M \operatorname{sen}(\theta - \omega) + \alpha \cos\theta + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta],$$

onde α_1 e α são quantidades infinitamente pequenas com ρ.

A equação da curva referida ás novas coordenadas será pois

$$(1) \qquad M \operatorname{sen}(\theta - \omega) + \alpha \cos\theta + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta = 0,$$

d'onde se conclue que, se ρ tende para zero, θ tende para ω ou para $\omega + \pi$, e portanto que podemos dar a ρ um valôr tão pequeno que θ esteja comprehendido entre $\omega + \varepsilon$ e $\omega - \varepsilon$ ou entre $\omega + \varepsilon + \pi$, e $\omega + \pi - \varepsilon$ representando por ε uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Procuremos agora quantos valores de θ podem corresponder a cada valôr de ρ, e consideremos para isso as funcções de θ:

$$F(x_0 + x', y_0 + y') = \rho[M \operatorname{sen}(\theta - \omega) + \alpha \cos\theta + \alpha_1 \operatorname{sen}\theta]$$

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{\partial F}{\partial x'} \rho \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial F}{\partial y'} \rho \cos\theta$$

A primeira d'estas funcções mostra que podemos dar a ρ um valôr tão pequeno que a funcção tenha o signal do primeiro termo; e como este termo muda de signal qundo θ passa por ω e por $\pi + \omega$, a funcção muda tambem duas vezes de signal. Por outra parte, esta funcção é continua relativamente a θ, e por isso não póde mudar de signal sem passar por zero; logo não ha menos de dous valores de θ comprehendidos entre $\omega + \varepsilon$ e $\omega - \varepsilon$ e entre $\omega + \varepsilon + \pi$ e $\omega - \varepsilon + \pi$ que satisfazem á equação (1).

Por serem $\frac{\partial F}{\partial x'}$ e $\frac{\partial F}{\partial y'}$ funcções continuas de x' e y' podemos pôr

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = P + \beta, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = Q + \beta_1,$$

onde β e β_1 são quantidades infinitamente pequenas com x' e y', e portanto com ρ. Logo temos

$$\frac{dF}{d\theta} = \rho\,[- P \operatorname{sen} \theta + Q \cos \theta - \beta \operatorname{sen} \theta + \beta_1 \cos \theta]$$

$$= \rho\,[M \cos(\theta - \omega) - \beta \operatorname{sen} \theta + \beta_1 \cos \theta].$$

D'esta igualdade conclue-se que entre $\omega + \varepsilon$ e $\omega' - \varepsilon$ não póde existir mais do que uma raiz de (1); porque, se houvesse mais, haveria um valôr de θ comprehendido n'este intervallo que annullaria $\frac{dF}{d\theta}$ (n.º 49), o que é impossivel visto que podemos dar a θ e ε valores tão pequenos que, no intervallo considerado, β *sen* $\theta + \beta_1$ *cos* θ seja tão pequeno quanto se queira, e M cos $(\theta - \omega)$ diffira da unidade tão pouco quanto se queira. Do mesmo modo se mostra que entre $\omega + \varepsilon + \pi$ e $\omega - \varepsilon + \pi$ não póde existir mais do que uma raiz da equação (1).

Conclue-se pois que na visinhança do ponto (x_0, y_0), a cada valôr de ρ correspondem dous valores de θ que dão pontos da curva, isto é, que uma circumferencia do raio infinitamente pequeno ρ corta a curva em dous pontos; logo no ponto (x_0, y_0) junctam-se dous arcos de curva. As inclinações dos dous raios vectores iguaes tendem uma para ω e a outra para $\pi + \omega$, logo estes raios vectores tendem para partes oppostas de uma mesma recta de direcção ω, que é portanto a tangente á curva.

Conclue-se de tudo isto que o ponto considerado é um ponto ordinario como se queria demonstrar.

112. — Para achar pois os pontos singulares da curva plana

$$F(x, y) = 0$$

temos de procurar os valores de x e y que satisfazem ás equações

$$F(x, y) = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Seja (x_0, y_0) um systema d'estes valores. Para conhecer a especie do ponto singular (x_0, y_0) mude-se na equação da curva x_0 em $x_0 + h$ e procure-se quantos valores reaes tem y na visinhança do ponto considerado, para saber quantos arcos de curva se encontram n'este ponto. Depois pelos valores que tem y'_0, que se acham pelo processo do n.º 102, vê-se se os arcos que se encontram no ponto (x_0, y_0) teem, ou não, a mesma tangente. Finalmente pelo signal de y''_0 vê-se a direcção da concavidade de cada arco (n.º 67).

Nota. — Deve-se notar que por ser y'_0 real, não se deve concluir que no ponto (x_0, y_0) passe algum arco real. Assim, por exemplo, a curva $y = log\, x$ é imaginaria quando x é negativa, e todavia a sua derivada $y' = \frac{1}{x}$ é real.

113. — Terminaremos a doutrina dos pontos singulares por alguns exemplos, enviando, para um estudo desenvolvido do methodo para achar estes pontos, que aqui só rapidamente indicámos, para o *Cours de Calcul différentiel* de J. A. Serret.

Exemplo 1.º — A equação da *lemniscata*

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0$$

dá para a determinação dos pontos singulares, as equações

$$P = -2x + 4x^3 = 0,\ Q = 2y = 0.$$

Logo esta curva tem um unico ponto singular (0, 0).

Derivando a equação dada vem

$$yy' - x + 2x^3 = 0$$

$$yy'' + y'^2 - 1 + 6x = 0,$$

e portanto no ponto (0, 0) temos $y' = \pm 1$.

Por outra parte a equação da curva, escripta debaixo da fórma

$$y = \pm x\sqrt{1-x^2}$$

mostra que no ponto (0, 0) se reunem quatro arcos da curva.

Logo o ponto (0, 0) é um ponto multiplo onde se reunem dous pontos ordinarios, e as tangentes aos arcos correspondentes fazem angulos de 45° com o eixo das abscissas.

Exemplo 2.º — A equação da *cissoïde*

$$(a - x)\, y^2 = x^3$$

dá

$$P = 3x^2 + y^2 = 0,\ Q = 2(x - a)\,y = 0,$$

e portanto esta curva só póde ter um ponto singular (0, 0).

Por ser

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$$

conclue-se que, na visinhança do ponto (0, 0), a cada valôr negativo de x correspondem dous valores imaginarios de y, e a cada valôr positivo de x correspondem dous valores iguaes e de signaes contrarios de y. Como, por outra parte, se obtem para y'_0 dous valores iguaes a zero, segue-se que no ponto (0, 0) se reunem dous arcos de curva tangentes ao eixo das abscissas positivas; logo o ponto (0, 0) é um ponto de reversão de primeira especie.

Exemplo 3.º — A curva

$$y^2 - 2x^2y + x^4 + x^5 = 0$$

tem um ponto singular unico, que é a origem das coordenadas. Escrevendo esta equação debaixo da fórma

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{-x}$$

vê-se que na origem se reunem dous arcos collocados do lado das abscissas negativas. Derivando-a quatro vezes e pondo nas equações resultantes $x = 0$ e $y = 0$, obtem-se para y'_0 dous valores iguaes a zero, e para y''_0 dous valores iguaes a $+ 2$, donde se conclue que ambos os arcos são tangentes ao eixo das abscissas e que teem a concavidade voltada no sentido das ordenadas positivas. Logo o ponto (0, 0) é de reversão de segunda especie.

Exemplo 4.º — A curva

$$y^2 - x^3 + x^2 = 0$$

tem um ponto singular, que é a origem das coordenadas. Derivando-a duas vezes obtem-se para y'_0 dous valores imaginarios e portanto a origem das coordenadas é um ponto solitario.

II

Curvas no espaço

114. — *Contacto de duas curvas no espaço.* — Sejam

$$y = f(x),\ Y = F(X)$$

$$z = f_1(x),\ Z = F_1(X)$$

as equações de duas curvas no espaço, que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0). A distancia d de dous pontos d'estas curvas correspondentes á mesma abscissa $x_0 + h$, será dada pela formula

$$d = \sqrt{[F(x_0 + h) - f(x_0 + h)]^2 + [F_1(x_0 + h) - f_1 x_0 + h)]^2}.$$

Se d fôr infinitamente pequeno de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que as curvas consideradas teem no ponto (x_0, y_0, z_0) um contacto de ordem n, e n'este caso as curvas approximam-se (n.º 103) na visinhança do ponto considerado mais uma da outra do que de qualquer outra curva com a qual tenham um contacto de ordem inferior.

Procuremos as condições analyticas para que as curvas consideradas tenham um contacto de ordem n no ponto considerado. Para isso, notemos que é condição necessaria e sufficiente para que d seja infinitamente pequeno de ordem $n+1$ relativamente a h que as differenças

$$F(x_0 + h) - f(x_0 + h) = \alpha$$

$$F_1(x_0 + h) - f_1(x_0 + h) = \beta$$

o sejam, ou que uma seja da ordem $n + 1$ e a outra de ordem superior. Com effeito, suppondo que uma das differenças é da ordem $n + 1$ e que a outra é da ordem $n + 1 + i$, temos (n.º 34).

$$\beta = h^{n+1}(A+\varepsilon),\ \alpha = h^{n+i+1}(B+\varepsilon'),$$

onde A e B são quantidades finitas e ε e ε' são quantidades infinitamente pequenas com h; e portanto

$$d = h^{n+1}\sqrt{(A+\varepsilon)^2 + h^{2i}(B+\varepsilon')^2},$$

donde se deduz que d é da ordem $n+1$ relativamente a h.

Reciprocamente, se d fôr da ordem $n+1$ relativamente a h, uma das quantidades α ou β será da ordem $n+1$ e a outra da mesma ordem ou de ordem superior. Porque, se aquella das quantidades que é de menor ordem fosse de ordem m differente de $n+1$, tambem d seria da ordem m em virtude do que vimos de demonstrar.

Para achar pois as condições analyticas do contacto de ordem n basta exprimir que uma das quantidades α ou β é infinitamente pequena da ordem $n+1$ relativamente a h, e que a outra é da mesma ordem ou de ordem superior. Raciocinando para isso como no caso das curvas planas (n.º 104) acha-se as equações de condição

$$f(x_0) = F(x_0),\ f'(x_0) = F'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0) = F^n(x_0)$$

$$f_1(x_0) = F_1(x_0),\ f'_1(x_0) = F'_1(x_0),\ \ldots,\ f_1^n(x_0) = F_1^n(x_0).$$

115. — Se uma das curvas fôr completamente dada, e fôr dada a especie da outra curva cuja equação contenha $2(n+1)$ constantes arbitrarias, podemos determinal-as de modo a satisfazer ás equações precedentes, e obteremos uma curva que tem com a curva dada um contacto de ordem n. N'este caso a curva assim obtida diz-se *osculadora* da primeira.

116. — Appliquemos estes principios á linha recta, isto é, procuremos a recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) da curva

$$y = f(x),\ z = f_1(x)$$

e que tem um contacto de ordem a mais elevada possivel com esta curva.

As equações da recta são de fórma

$$Y = AX + B,\ Z = CX + D$$

e podemos portanto determinar as quatro constantes A, B,

C, D de modo a satisfazer ás quatro equações necessarias para o contacto de primeira ordem:

$$y_0 = Ax_0 + B,\ z_0 = Cx_0 + D,\ f'(x_0) = A,\ f'_1(x_0) = C.$$

Logo as equações da recta pedida são

$$Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0),\ Z - z_0 = f'_1(x_0)(X - x_0),$$

e a recta é portanto tangente á curva no ponto (x_0, y_0) (n.º 71).

117. — Procuremos em segundo logar o *circulo osculador* da curva

$$y = f(x),\ z = f_1(x)$$

no ponto (x_0, y_0).

Como toda a circumferencia póde resultar da intersecção de uma esphera com um plano que passa pelo seu centro, as equações da circumferencia serão

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2$$

$$Z = AX + BY + C.$$

N'esta equações ha sete constantes arbitrarias que vamos determinar de modo a satisfazer ás seis equações necessarias para que a circumferencia e a curva dada tenham no ponto (x_0, y_0) um contacto de segunda ordem, e á condição de passar o plano pelo centro da esphera; isto é, ás sete equações seguintes:

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} z_0 = Ax_0 + By_0 + C \\ c = Aa + Bb + C \\ z'_0 = A + By'_0 \\ z''_0 = By''_0 \\ (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2 \\ x_0 - a + (y_0 - b)\,y'_0 + (z_0 - c)\,z'_0 = 0 \\ 1 + (y_0 - b)\,y''_0 + y'^2_0 + (z_0 - c)\,z''_0 + z'^2_0 = 0\,. \end{array}\right.$$

Eliminando A, B e C entre a primeira, terceira, e quarta das equações precedentes e a equação do plano, vem a equação

$$y''_0 (Z - z_0) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)(X - x_0) + z''_0 (Y - y_0),$$

que pertence (n.º 71 — IV) ao plano osculador da curva no ponto (x_0, y_0).

Logo *o circulo osculador n'um ponto da curva está no plano osculador da curva, correspondente ao mesmo ponto.*

Eliminando agora A, B e C entre as quatro primeiras equações (b), o que dá

$$y''_0 (z_0 - c) = (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)(x_0 - a) + z''_0 (y_0 - b),$$

e em seguida, eliminando a, b e c entre esta equação e as duas ultimas equações (b), vêem as formulas

$$a = x_0 - \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)(y'_0 y''_0 + z'_0 z''_0)}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$b = y_0 + \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)[z''_0 + y'_0 (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)]}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}$$

$$c = z_0 + \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)[y''_0 + z'_0 (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)]}{y''^2_0 + z''^2_0 + (z'_0 y''_0 - y'_0 z''_0)^2}.$$

que dão as coordenadas do centro do circulo osculador.

Substituindo depois os valores de $x_0 - a$, $y_0 - b$ e $z_0 - c$ na quinta das equações (b) vem, depois de algumas reducções, a formula

$$R = \frac{(1 + y'^2_0 + z'^2_0)^{\frac{3}{2}}}{[y_0''^2 + z''^2_0 + (y'_0 z''_0 - z'_0 y''_0)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

que dá o raio do circulo osculador. Da comparação d'esta formula com a que dá (n.º 72 — I) o raio de curvatura, tomando n'esta x para variavel independente (pondo $x' = 1$ e $x'' = 0$), conclue-se que *o raio do circulo osculador de uma curva n'um ponto dado é igual ao raio de curvatura da curva no mesmo ponto.*

III

Superficies

118. — *Contacto de uma curva com uma superficie.* — Sejam

$$Z = F(X, Y)$$

$$y = \varphi(x),\ z = \psi(x)$$

as equações de uma superficie e de uma curva que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0). Se pelo ponto $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ da curva, infinitamente proximo do ponto (x_0, y_0, z_0), tirarmos uma parallela ao eixo dos zz, que encontra a superficie n'um ponto cujas coordenadas são

$$x_0 + h,\ \varphi(x_0 + h),\ F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)),$$

a differença entre as ordenadas correspondentes da curva e da superficie será

$$F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - \psi(x_0 + h)\,.$$

Se esta differença fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h, diz-se que *a curva e a superficie têem no ponto* (x_0, y_0) *um contacto de ordem* n.

Raciocinando como no (n.º 104) e pondo $F(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0)$, acha-se que as condições necessarias e sufficientes para que a curva e a superficie tenham um contacto de ordem n são

$$f(x_0) = \psi(x_0),\ f'(x_0) = \psi'(x_0), \ldots, f^n(x_0) = \psi^n(x_0)\,.$$

119. — Se a curva fôr completamente dada assim como a especie da superficie, e a equação d'esta contiver $n + 1$ constantes arbitrarias, podemos determinal-as de modo que as condições precedentes sejam satisfeitas, isto é, de modo que a superficie tenha com a curva um contacto de ordem n.

N'este caso diz-se que *a superficie é osculadora* da curva considerada.

I — Procuremos a equação do *plano osculador* da curva $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Temos para isso de determinar as constantes A, B e C que entram na equação do plano

$$Z = AX + BY + C$$

de modo que sejam satisfeitas as equações de condição:

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C,\ A + B\varphi'(x_0) = \psi'(x_0),\ B\varphi''(x_0) = \psi''(x_0),$$

o que leva a uma equação que coincide com a equação (5) do n.º 71, justificando assim a designação que foi dada ao plano estudado n'esse numero.

120. — *Contacto de duas superficies.* — Sejam

$$z = f(x, y),\ Z = F(X, Y)$$

as equações de duas superficies que se cortam no ponto (x_0, y_0, z_0), e $x_0 + h$, $y_0 + k$, $z_0 + l$ as coordenadas de um ponto infinitamente visinho de (x_0, y_0, z_0).

Por serem y e x variaveis independentes ponhamos $y = \varphi(x)$, representando por φ uma funcção arbitraria. Se a differença de duas ordenadas das duas superficies, correspondentes aos mesmos valores de $x_0 + h$ e $y_0 + k$ de x e y, isto é

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0 + k)$$
$$= F(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) - f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$$

fôr infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h, qualquer que seja φ, diz-se que *as duas superficies têem no ponto* (x_0, y_0, z_0) *um contacto de ordem* n.

Para que a differença precedente seja infinitamente pequena de ordem $n + 1$ relativamente a h é necessario e sufficiente (n.º 104) que as funcções $F(x_0, \varphi(x_0))$ e $f(x_0, \varphi(x_0))$ e as suas n primeiras derivadas sejam respectivamente iguaes, o que dá (n.º 79 — V)

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} \varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial y_0} \varphi'(x_0)$$

....

$$\Sigma A \frac{\partial^m F}{\partial x_0^{\alpha'} \partial y_0^{m-\alpha'}} (\varphi'(x_0))^\alpha (\varphi''(x_0))^\beta \ldots (\varphi^n(x_0))^\lambda$$

$$= \Sigma A \frac{\partial^m f}{\partial x_0^{\alpha'} \partial y_0^{m-\alpha'}} (\varphi'(x_0))^\alpha (\varphi''(x_0))^\beta \ldots (\varphi^n(x_0))^\lambda .$$

Devendo estas equações ter logar qualquer que sejam as funcções $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, etc., conclue-se que *as condições necessarias e sufficientes para que as duas superficies tenham um contacto de ordem* n *no ponto* (x_0, y_0) *são:*

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_0} = \frac{\partial f}{\partial y_0}$$

....

$$\frac{\partial^n F}{\partial x_0^n} = \frac{\partial^n f}{\partial x_0^n}, \quad \frac{\partial^n F}{\partial x_0^{n-1} \partial y_0} = \frac{\partial^n f}{\partial x_0^{n-1} \partial y_0}, \ldots, \frac{\partial^n F}{\partial y_0^n} = \frac{\partial^n f}{\partial y_0^n} .$$

121. — Se uma das superficies consideradas fôr completamente determinda, e se fôr dada a especie da outra, cuja equação contenha m constantes arbitrarias, podemos determinar estas constantes de modo que as superficies tenham um contacto de ordem n, se m fôr igual ao numero de equações necessarias para haver contacto de ordem n, isto é,

$$m = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

No caso contrario pode-se estabelecer só um contacto de ordem inferior a n, e a equação fica ainda com algumas constantes arbitrarias. No primeiro caso, diz-se que a segunda superficie é *osculadora* da primeira.

I — A equação do plano

$$Z = AX + BY + C$$

contendo tres constantes arbitrarias, póde esta superficie ter um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$. Para achar o plano que satisfaz a esta condição determine-se as constantes arbitrarias por meio das tres equações necessarias para o contacto de primeira ordem, que dão

$$z_0 = Ax_0 + By_0 + C, A = \frac{\partial f}{\partial x_0}, B = \frac{\partial f}{\partial y_0};$$

portanto a equação do *plano osculador* da superficie será

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0}(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y_0}(Y - y_0),$$

que coincide com a equação do plano tangente (n.º 73).

II — Consideremos, em segundo logar, a esphera

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = R^2.$$

Podemos dispôr de tres das constantes arbitrarias que contém esta equação, de modo a satisfazer ás tres equações de condição necessarias para que esta superficie tenha um contacto de primeira ordem com a superficie $z = f(x, y)$.

Para obter um contacto de segunda ordem é necessario que a equação da superficie osculadora contenha seis constantes arbitrarias, e portanto a esphera não póde ter um contacto de segunda ordem com a superficie dada, excepto em alguns pontos particulares da superficie, como vamos vêr.

Para haver contacto de segunda ordem, os valores de $Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ e $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ tirados da equação da esphera e das equações

$$X - a + (Z - c)\frac{\partial Z}{\partial X} = 0$$

$$Y - b + (Z - c)\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial X} + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 + (Z - c)\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0$$

devem ser iguaes respectivamente a $f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}$ quanto n'ellas se faz $X = x_0$ e $Y = y_0$, o que dá as equações de condição:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = R^2$$

$$x_0 - a + (z_0 - c)\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$$

$$y_0 - b + (z_0 - c)\frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 + (z_0 - c)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_0} + (z_0 - c)\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0} = 0$$

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2 + (z_0 - c)\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = 0\,.$$

As quatro primeiras equações servem para determinar as constantes arbitrarias a, b, c e R. As duas ultimas, eliminando $z_0 - c$ por meio da quarta, dão as equações

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial y_0}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2\right]\frac{\partial^2 f}{\partial x_0\,\partial y_0}\,,$$

a que devem satisfazer os pontos (x_0, y_0, z_0) da superficie $y = f(x, y)$, para que n'elles a superficie possa ter uma esphera osculadora.

Tomando um qualquer d'estes pontos para origem das coordenadas, o plano tangente para plano dos xy e os planos das secções principaes para planos dos xz e yz, e chamando $z = f_1(x, y)$ a nova equação da superficie, as equações precedentes dão

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \, \partial y}\right) = 0$$

por ser (n.º 74) $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 = 0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 = 0$.

As curvaturas c_1 e c_2 das secções principaes que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) são (n.º 74) dadas pelas formulas

$$c_1 = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)_0, \; c_2 = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)_0;$$

portanto teremos $c_1 = c_2$, o que prova que *os pontos em que a superficie tem um contacto de segunda ordem com uma esphera coincidem com os pontos umbilicaes* (n.º 74).

Para um estudo mais desenvolvido e profundo da theoria do contacto consulte-se o bello *Cours d'Analyse* do snr. Hermite.

CAPITULO VII

FUNCÇÕES DEFINIDAS POR SÉRIES. SINGULARIDADES DAS FUNCÇÕES

I

Funcções definidas por séries

122. — Vamos n'este Capitulo estudar as funcções definidas por séries para estabelecer as condições da sua continuidade, e achar as suas derivadas. Em seguida, formaremos por meio d'estas funcções exemplos das singularidades mais importantes relativamente á continuidade e ás derivadas, que as funcções apresentam.

123. — *Continuidade das funcções definidas por séries.* — A este respeito vamos demonstrar o seguinte:

Theorema. — Se a série

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

onde $f_1(x)$, $f_2(x)$, *etc. representam funcções continuas de* x *n'um intervallo dado, fôr uniformemente convergente n'este intervallo, a funcção* $f(x)$ *será continua no mesmo intervallo.*

Com effeito, por ser uniformemente convergente a série considerada, a cada valôr da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, deve corresponder (n.º 17) um valôr m tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x) < \frac{\delta}{3}$$

seja satisfeita (em valôr absoluto) qualquer que seja p, e qualquer que seja o valôr de x comprehendido no intervallo considerado. Logo, no mesmo intervallo, a somma $\sum_{m+1}^{\infty} f_n(x)$ não póde exceder $\frac{\delta}{3}$.

Mas por ser continua a somma (n.º 22)

$$P_m(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x),$$

pode-se sempre dar a h um valôr h_1 tal que a desigualdade

$$P_m(a+h) - P_m(a) < \tfrac{1}{3}\delta$$

seja satisfeita (em valôr absoluto) por todos os valores de h inferiores a h_1, quando a representa um valôr de x comprehendido no intervallo considerado.

D'estas desigualdades e da igualdade

$$f(x+h) - f(x) = P_m(x+h) - P_m(x)$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$$

conclue-se pois que, por mais pequeno que seja o valôr que se attribua a δ, ha sempre um valôr de m e um valôr de h, tal que a desigualdade

$$f(a+h) - f(a) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1. Logo a funcção é continua n'um ponto qualquer $x = a$ do intervallo considerado, e portanto em todo o intervallo.

124.—*Derivadas das funcções definidas por séries.* —Principiaremos o que temos a dizer sobre as derivadas das funcções definidas por séries, fazendo notar que as séries, cujos termos são as derivadas dos termos de uma série convergente, póde ser divergente. E' o que mostra claramente a série seguinte:

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots,$$

que é convergente quando é $x = 1$, em quanto que a série das derivadas dos seus termos

$$-1 + x - x^2 + \ldots \pm x^{n-1} \mp \ldots$$

é divergente quando é $x = 1$.

Posto isto, vamos demonstrar o seguinte:

Theorema. — *Se a série*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

fôr convergente n'um intervallo dado, e se no mesmo intervallo fôr uniformemente convergente a série seguinte formada com as derivadas dos termos da precedente:

$$f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

será

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

no mesmo intervallo.

Seja a um valôr qualquer de x comprehendido no intervallo considerado, e ponhamos para brevidade

$$R(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f_n(x),\; R_1(x) = \sum_{m+p+1}^{\infty} f'_n(x).$$

Teremos evidentemente (n.º 49)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_1^{\infty} f'_n(a) = \sum_1^{m+p} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right]$$

$$+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a)$$

$$= \sum_1^{m} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right] + \sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a + \theta h) - f'_n(a)]$$

$$+ \frac{R(a+h)}{h} - \frac{R(a)}{h} - R_1(a),$$

onde θ representa uma quantidade positiva menor do que a unidade.

Por ser uniformemente convergente a série $\Sigma\, f'_n(x)$ no intervallo considerado, se dermos a δ um valôr tão pequeno quanto se queira, podemos determinar um valôr correspondente para m tal que as desigualdades (em valôr absoluto)

$$\sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a) < \frac{\delta}{10}, \quad \sum_{m+1}^{m+p} f'_n(a+\theta h) < \frac{\delta}{10}$$

sejam satisfeitas por qualquer valôr de p. Logo, no mesmo intervallo, a desigualdade

$$\sum_{m+1}^{m+p} [f'_n(a+\theta h) - f'_n(a)] < \frac{\delta}{5}$$

será tambem satisfeita.

Por outra parte, por ser

$$f'_n(a) = \lim \frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h},$$

podemos concluir que ha um valôr h_1 tal que a desigualdade

$$\sum_{1}^{m} \left[\frac{f_n(a+h) - f_n(a)}{h} - f'_n(a)\right] < \frac{\delta}{5}$$

(onde m tem um valôr finito anteriormente determinado) será satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1.

Finalmente, por serem convergentes as séries $\Sigma\, f_n(x)$ e $\Sigma\, f'_n(x)$, a cada valôr de h corresponderá um valôr de p tal que seja

$$R(a+h) < \frac{\delta}{5}, \quad R(a) < \frac{\delta}{5}, \quad R_1(a) < \frac{\delta}{5}.$$

Das desigualdades precedentes conclue-se que, dando a δ um valôr tão pequeno quando se queira, ha sempre um valôr correspondente h_1 tal que a desigualdade (em valôr absoluto)

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \sum_{1}^{\infty} f'_n(a) < \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5} + \frac{\delta}{5}$$

será satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1; e portanto teremos

$$\lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \sum_1^{\infty} f'_n(a),$$

que é o que se queria demonstrar.

II

Singularidades d'algumas funcções

125. — *Funcções discontinuas em pontos isolados.* — Uma funcção $f(x)$ é discontinua no ponto $x = a$ quando n'este ponto se torna infinita, ou indeterminada ou passa de um valôr a outro que differe do primeiro d'uma quantidade finita. Da primeira especie de discontinuidade temos até aqui encontrado muitos exemplos nas funcções racionaes, quando a é raiz do denominador, na funcção $tang\ x$ quando é $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, etc. Temos um exemplo simples da segunda especie de discontinuidade na funcção $\text{sen} \frac{1}{x-a}$ que no ponto $x = a$ é indeterminada. Para exemplo da terceira especie de discontinuidade, da qual não offerecem exemplo as funcções que até aqui temos estudado, apresentarei a funcção definida pela série seguinte

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)} + \ldots + \frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})} + \ldots$$

Com effeito, temos evidentemente

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = -1 + \frac{2}{1+x^m}$$

$$\frac{1}{1+x^m} = \frac{1}{1+x^{m-1}} + \frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})}$$

$$\frac{1}{1+x^{m-1}}=\frac{1}{1+x^{m-2}}+\frac{x^{m-2}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^{m-2})}$$

....

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x}=\tfrac{1}{2}+\frac{1-x}{2(1+x)}$$

donde se tira

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=\frac{2(1-x)}{2(1+x)}+\frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)}+\ldots+\frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

e

$$\lim_{m=\infty}\frac{1-x^m}{1+x^m}=2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}.$$

D'esta igualdade conclue-se que a funcção considerada é igual a $+1$ se o valôr absoluto de x é menor do que a unidade, que é igual a -1 se o valôr absoluto de x é maior do que a unidade, que é igual a zero se é $x=1$ e que é igual infinito se $x=-1$. A funcção é pois discontinua no ponto $x=1$, onde passa do valôr $+1$ ao valôr -1, e no ponto $x=-1$ onde é infinita.

126. — *Condensação das singularidades.* — As funcções que até aqui temos encontrado apresentam n'um intervallo finito um numero finito de pontos em que são discontinuas. Ha porém funcções que, n'um intervallo finito, são discontinuas em um numero infinito de pontos separados por outros em que são continuas, e ha funcções que n'um intervallo finito são discontinuas em todos os pontos. Para formar funcções d'esta natureza pode-se seguir um methodo devido a Hankel (*) e por elle chamado *methodo da condensação das singularidades*, por meio do qual, partindo de uma funcção com um numero limitado de singularidades, se fórma uma funcção com infinitas singularidades. Vamos aqui expôr o

(*) *Hankel: Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen* — Tubingue, 1870.

principio fundamental d'este methodo, que se póde estudar desenvolvidamente no excellente livro: *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* do sr. Dini, professor na Universidade de Pisa.

I — Represente-se por $\varphi(y)$ uma funcção de y que no intervallo entre $y = -1$ e $y = +1$ é continua e menor do que uma quantidade M, que no ponto $y = 0$ é nulla e que, quando y tende para zero passando por valores positivos e negativos, tende para um limite differente de zero, ou para dois limites dos quaes um, pelo menos, é differente de zero.

A funcção φ (sen $nx\pi$), onde n é inteiro, será nulla e discontinua nos pontos onde $x = \frac{m}{n}$ (m inteiro), e será continua nos outros pontos.

N'estes ultimos pontos, a funcção

$$(1) \qquad f(x) = \sum_1^\infty A_n \varphi(\text{sen}\, nx\pi)$$

é tambem continua, se A_1, A_2, etc. representarem quantidades taes que seja absolutamente convergente a séries $\sum_1^\infty A_n$. Com effeito, n'este caso, a cada valôr de δ por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr m_1 de m tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} A_x < \delta$$

será satisfeita por m_1 e pelos inteiros superiores. Logo *à fortiori* a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} A_n \varphi(\text{sen}\, nx\pi) < \delta$$

será satisfeita pelos mesmos valores de m, em todos os pontos onde a funcção φ é continua. A série (1) é pois uniformemente convergente nos pontos considerados, e portanto a funcção $f(x)$ é continua (n.º 123) nos mesmos pontos.

Consideremos agora os pontos onde a funcção φ (sen $n\pi x$) é discontinua, isto é, os pontos onde $x = \frac{m}{p}$, m e p representando dous numeros inteiros primos entre si; e seja primeiramente m um numero par.

Pondo $n = ap + b$, onde b representa um numero inteiro menor do que p teremos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,\,b} A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]$$

onde $\sum\limits_{a,\,b}$ representa uma somma que se refere a todos os valores inteiros e positivos de a e b, excluindo os termos correspondentes a $b = 0$ que são nullos.

Do mesmo modo teremos

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) = \Sigma A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)_{1}\pi\right]$$

ou, reparando os termos correspondentes a $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) = \Sigma A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right]$$

$$+ \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(am\pi + aph\pi)\right].$$

Logo será

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,\,b} A_{ap+b}\left\{\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right]\right.$$

$$\left.-\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]\right\} + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\operatorname{sen} aph\pi),$$

e, por ser a funcção $\sum\limits_{a,\,b} A_{ap+b}\,\varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]$ continua quando b é differente de zero,

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p}+h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right)\right] = \lim_{h=0}\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\,\varphi\,(\operatorname{sen} aph\pi).$$

Quer h tenda para zero passando por valores positivos, quer h tenda para zero passando por valores negativos, da uniformidade de convergencia da série

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi)$$

na vesinhança do ponto $h = 0$, conclue-se que, por mais pequeno que seja o valôr que se dê a δ, ha sempre um valôr m_1 tal que as desigualdades

$$\sum_{a=m+1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) < \frac{\delta}{3}$$

$$\sum_{a=m+1}^{\infty} A_{ap} \lim \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) < \frac{\delta}{3}$$

sejam satisfeitas pelos valores de m superiores a m_1.

Determinado assim m, ha sempre um valôr h_1 tal que a desigualdade (n.º 33, 1.º)

$$\sum_{a=1}^{m} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \sum_{a=1}^{m} A_{ap} < \frac{\delta}{3}$$

seja satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1.

Logo a desigualdade

$$\sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) - \lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}$$

$$< \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3}$$

será satisfeita pelos valores de h inferiores a h_1, e teremos

$$\lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}\, \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) = \lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}$$

d'onde

$$\lim_{h=0} \left[f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=} \varphi\,(\text{sen}\; aph\pi) \,.\, \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como, por hypothese, um, pelo menos, dos valores $\lim_{h=0} \varphi\,(\text{sen } aph\pi)$ e $\lim_{h=0} \varphi\,(-\text{ sen } aph\pi)$, correspondentes um a valores positivos e outro a valores negativos de h, é differente de zero, a funcção $f\,(x)$ é, discontinua nos pontos $x = \frac{m}{n}$.

Por uma analyse semilhante se mostra que a funcção $f\,(x)$ é discontinua nos pontos $x = \frac{m}{n}$, quando m é impar.

Logo a funcção $f\,(x)$ é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e é discontinua em todos os pontos em que x é commensuravel.

Para applicar o methodo anterior é necessario formar uma funcção $\varphi\,(y)$ que satisfaça ás condições impostas anteriormente a esta funcção. Póde servir para este fim a funcção

$$-\frac{y}{y+2} - \frac{2y\,(y+1)}{[(y+1)^2+1]\,[y+2]} - \dots$$

$$-\frac{2y\,(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k+1]\,[(y+1)^{k-1}+1]} - \dots$$

que se deduz da série que atraz considerámos:

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x\,(1-x)}{(1+x^2)\,(1+x)} + \dots + \frac{2x^{k-1}\,(1-x)}{(1+x^k)\,(1+x^{k-1})} + \dots$$

pondo $x = y + 1$.

Com effeito, sendo esta série igual a $+1$, 0, ou -1 segundo é $x < 1$, $x = 1$ ou $x > 1$, será aquella igual a $+1$, 0, ou -1 segundo é $x < 0$, $x = 0$ ou $x > 0$.

Temos pois a funcção

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \text{ sen } n\pi x\,(\text{sen } n\pi x + 1)^{k-1}}{[(\text{sen } n\pi x + 1)^k + 1]\,[(\text{sen } n\pi x + 1)^{k-1} + 1]}$$

que é continua quando a x se dá valores incommensuraveis, e que é discontinua nos pontos onde x é commensuravel.

II — Partindo da série que vimos de empregar:

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k+1]\,[(y+1)^{k-1}+1]}$$

podemos formar agora uma funcção totalmente discontinua n'um intervallo finito. Com effeito, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,[\varphi(\text{sen}\, n\pi x)]^2}$$

será igual a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ quando x é incommensuravel e será infinita quando x é commensuravel porque no primeiro caso a funcção $[\varphi(\text{sen}\, n\pi x)]^2$ é igual a $+1$, e no segundo caso é nulla.

Logo a funcção

$$f(x) = \frac{e-1}{\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n!\,[\varphi(\text{sen}\, n\pi x)]^2}}$$

é igual a zero quando x é commensuravel, e é igual a $+1$ quando x é incommensuravel, e portanto é totalmente descontinua n'um intervallo qualquer.

127. — *Exemplo de uma funcção continua que não tem derivada.* — Pelo methodo de Hankel pode-se formar funcções continuas com um numero infinito de pontos onde não têem derivada. Não entraremos porém aqui n'esta parte do methodo de condensação das singularidades, e limitar-nos-hemos a apresentar um exemplo de uma funcção continua que não tem derivada em ponto algum, devido ao snr. Weierstrass, que tractaremos pela mesma analyse que o eminente geometra (*Jornal de Crelle* — tomo 79). Esta funcção é a seguinte:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\,\pi,$$

onde a que representa um inteiro impar, e b, representa um numero positivo menor do que a unidade, devem ser escolhidos de modo que seja

$$ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi .$$

A série que define $f(x)$ é uniformemente convergente qualquer que seja o valôr de x. Com effeito, por ser convergente a progressão $\Sigma\, b^n$ a cada valôr de δ, por mais pequeno que seja, corresponderá um valôr m tal que a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

será satisfeita por todos os inteiros superiores a m. Logo a desigualdade

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos(a^n x)\pi < \delta$$

é *à fortiori* satisfeita pelos mesmos valores de m qualquer que seja x, e a série é portanto uniformemente convergente.

D'aqui e de ser cada termo da série uma funcção continua de x conclue-se (n.º 123) que a funcção $f(x)$ é continua.

Posto isto, vejamos como o snr. Weierstrass demonstra que esta funcção não tem derivada.

Represente x_0 um valôr determinado de x, m um numero inteiro positivo e α_m um numero inteiro tal que seja

$$-\tfrac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leqq \tfrac{1}{2} .$$

Representando esta differença por x_{m+1} e pondo

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m},\ x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

vem

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m},\ x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m},$$

d'onde se conclue que x_0 está conprehendido entre x' e x'', e que se póde dar a m um valôr tão grande que x' e x'' diffiram de x_0 tão pouco quanto se queira.

Por outra parte, temos

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n \frac{\cos (a^n x')\pi - \cos (a^n x_0)\pi}{x' - x_0} \right)$$

$$= A + B$$

pondo

$$A = \sum_{0}^{m-1} \left(a^n \ b^n \ . \ \frac{\cos (a^n x')\pi - \cos (a_n x_0)\pi}{a^n (x' - x_0)} \right)$$

$$B = \sum_{0}^{\infty} \left(b^{m+n} \frac{\cos (a^{m+n} x')\pi - \cos (a^{m+n} x_0)\pi}{x' - x_0} \right).$$

Por ser

$$\frac{\cos (a^n x')\pi - \cos (a^n x_0)\pi}{a^n (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi},$$

e por ser (em valôr absoluto)

$$\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' + x_0}{2} \pi \right) < 1, \quad \frac{\operatorname{sen} \left(a^n \frac{x' - x_0}{2} \right) \pi}{a^n \frac{x' - x_0}{2} \pi} < 1,$$

temos (em valôr absoluto)

$$A < \pi \sum_{0}^{m-1} a^n b^n,$$

ou

$$A < \frac{\pi}{ab - 1} (ab)^m.$$

Como é

$$\cos (a^{m+n} x')\pi = \cos a^n (\alpha_m - 1)\pi = -(-1)^{\alpha_m}$$

$$\cos(a^{m+n}x_0)\pi = \cos(a^n\alpha_m + a^n x_{m+1})\pi = (-1)^{\alpha_m}\cos(a\,x_{mm+1})\pi,$$

temos tambem

$$B = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\cos(a^n x_m + 1)\pi}{1 + x_m + 1} b^n,$$

e, por serem positivos todos os termos da somma

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1+\cos(a^n x_m + 1)\pi}{1 + x_m + 1} b^n,$$

e o primeiro termo não ser menor do que $\frac{2}{3}$ (visto que $1 + x_{m+1}$ está comprehendido entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$),

$$(-1)^{\alpha_m} B > \tfrac{2}{3}(ab)^m.$$

Temos pois

$$B = (-1)^{\alpha_m} \tfrac{2}{3}\eta\,(ab)^m$$

onde η representa um numero positivo maior do que a unidade, e

$$A = (-1)^{\alpha_m} \cdot \frac{\eta\,\varepsilon\,\pi}{ab-1}(ab)^m$$

onde ε representa uma quantidade comprehendida entre $+1$ e -1.

Temos pois

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta\left(\frac{2}{3} + \varepsilon\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Do mesmo modo se acha

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \eta_1\left(\frac{2}{2} + \varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Dando pois a a e b valores taes que seja $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ ou

$$\tfrac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1},$$

conclue-se das igualdades procedentes que as razões

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \quad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

ou não tendem para limite algum finito, ou tendem para limites de signaes contrarios, quando x' e x'' tendem para x_0. Em qualquer dos casos a funcção $f(x)$ não tem derivada no ponto x_0.